Brousseau, G., "Los obstáculos epistemológicos y los problemas en matemáticas", en *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), México, DIE-Cinvestav, 1983, pp. 165-198.

Los Obstáculos Epistemológicos y los Problemas en Matemáticas*

Por Guy Brousseau

1. Introducción

1.0. Tema del Estudio.

Un alumno no hace matemáticas si no plantea y no resuelve problemas. Todo el mundo está de acuerdo con lo anterior. Las dificultades comienzan cuando se trata de saber cuáles problemas él debe plantearse, quién los plantea, y cómo.

1.1. Concepciones clásicas de la noción de problema.

Para simplificar estas dificultades, parece que los especialistas en didáctica de las matemáticas ensayan, desde hace algún tiempo, de proyectar la colección de problemas imaginables sobre un sub-espacio, producto de los componentes siguientes:

1.1.1. Las intenciones metodológicas del profesor.

Es la componente descrita al principio del "libro del problema" de Glaeser y de sus colaboradores (problemas de investigación, de entrenamiento, de introducción, etcétera...).

1.1.2. Las intenciones didácticas y los objetivos (por ejemplo los de Bloom): adquisiciones de conocimientos, mejor comprensión, análisis, etcétera.

1.1.3. El contenido matemático: casi siempre la cuestión consiste en requerir del alumno el establecer una fórmula verdadera dentro de una teoría en curso de estudio. El contenido de un problema es entonces a priori definible como una pareja..(T, f); T siendo una teoría supuesta explicitada en el curso y f la fórmula a encontrar, a establecer o a colocar en una demostración de T.

Esta concepción permite en principio de colocar los problemas unos con relación a otros, a condición de tener una axiomática conveniente de la teoría por enseñar: las discusiones sobre la selección de la mejor axiomática sustentan la mayor parte de las investigaciones sobre los programas desde hace años. "La mejor axiomática" sería aquella que permitiría con el mínimo

*Ponencia presentada en la reunión de la CIAEEM en Louvain-La-Neuve, Bélgica, 1976.

de esfuerzo de aprendizaje o de enseñanza, engendrar la colección de los teoremas-problemas, de examen o de control, fijados por un consenso social.

¿Es necesario prever varias teorías particulares que uno relacionará enseguida (tendencia "clásica"), o una teoría unitaria general de la cual uno deduce las otras (tendencia "moderna")? ¿Hacen falta muchos axiomas débiles y bien ordenados (Diendonné: Álgebra lineal y Geometría Elemental)?, ¿pocos axiomas potentes (Choquet: La enseñanza de la geometría)? ¿axiomas "evidentes" o axiomas "muy elaborados"?

En la ausencia de una teoría conveniente del conocimiento apoyándose sobre una teoría pertinente del aprendizaje, las discusiones no han dado jamás lugar a estudios experimentales científicos.

Esta concepción permite, por otra parte, distinguir dos cosas:

La pareja (T, f) que caracteriza al problema, y la demostración de T-f, la cual puede ser el objeto de un estudio matemático o metamatemático. Y esta distinción va a servir de base a una nueva descomposición del contenido matemático, siguiendo dos criterios diferentes, pero vecinos:

– El dominio de aplicación: (la teoría T), opuesto a la "estructura" matemática o lógica que opera sobre T.

– El modelo matemático (en el sentido de los logicistas), opuesto al lenguaje.

Estos pares de caracteres opuestos corresponden a los rasgos distintivos sobre los cuales los profesores se apoyan espontáneamente: abstracto-concreto, contenido-formal, teórico-práctico, etcétera... pero su puesta en obra no ha proporcionado jamás ni tipologías utilizables ni índices objetivos.

1.1.4. Componentes metamatemáticos. De hecho, todas las tentativas de descripciones racionales y formales de las matemáticas son utilizadas para tratar de construir variables intermedias que, sin ser el contenido mismo, permitirán engendrarlo a menor costo.

La concepción de los problemas sobre la forma T-f conduce frecuentemente a asimilar las hipótesis a lo que es conocido, las conclusiones a lo que se busca (o a la inversa) y la resolución a un camino que coincidiría fácilmente con la demostración buscada.

Ciertas demostraciones pueden ser obtenidas sin mucha reflexión, por la aplicación de una sucesión finita de especificaciones conocidas de antemano: existe entonces un algoritmo, autómata productor de la demostración particular buscada.

En este caso, puede hacerse la descripción, clásica y maravillosamente simple y gratificante para el profesor, de la actividad cognitiva del alumno, del aprendizaje y del rol del que enseña. El maestro enseña al alumno, quien lo memoriza, el algoritmo que permite establecer los teoremas.

1.1.5. La componente heurística. Pero para otras demostraciones, no existen tales algoritmos. Para no renunciar al modelo de adquisición precedente, uno va a imaginar que la demostración puede ser conducida por "intuiciones" que jugarán un poco el papel de los algoritmos. Estas intuiciones podrán ser racionalizadas localmente, una vez que la puesta en obra de una teoría ya constituida proporcione la demostración buscada o una parte de ésta (uno aplicará un teorema) –la selección de las teorías o de las estructuras estando igualmente guiada por heurísticas, que uno puede, después, invocar para justificar el procedimiento seguido. A pesar de su carácter un poco *ad hoc*, estos conceptos no faltan de interés, como lo muestran en este encuentro (ref. a la CIEAEM, 1976) las exposiciones de G. Glaeser, de G. Paquette, M. Ciosek, F. Wilson, de C. Janvier, etcétera...

1.2. Crítica de estas concepciones.

Yo contesto la validez de tal descomposición clasificatoria, a pesar de las facilidades que procura, porque conduce a aceptar pre-supuestos lamentables, separando los elementos que funcionan juntos.

1.2.1. El sujeto.

El sujeto –el alumno– está ausente de este análisis, donde no aparece más que como un receptor, un registrador extremadamente simplificado que el saber adquirido no modifica sensiblemente, ni, sobre todo, estructuralmente.

1.2.2. La significación y el sentido.

De la misma forma, y por vía de consecuencia, la significación de la matemática desaparece:

todo lo que hace, no solamente la verdad, sino el interés de un teorema y con eso, lo que F. Ganseth llamaba el carácter idóneo (idoneidad) de un conocimiento matemático, lo que hace que este conocimiento exista como solución óptima dentro del campo definido por un cierto número de restricciones (relativas al sujeto cognoscente o al conocimiento mismo), lo que hace de él un objeto en el sentido de R. Thom, una solución a un problema y en fin, lo que dice el interés del problema mismo.

El sentido de un conocimiento matemático se define –no solamente por la colección de situaciones donde este conocimiento es realizado en tanto que teoría matemática (semántica en el sentido de Carnap)– no solamente por la colección de situaciones donde el sujeto la ha encontrado como medio de solución, sino también por el conjunto de concepciones, de elecciones anteriores que rechaza, de los errores que evita (yo agregaría: las economías que procura, las formulaciones que retoma y muchas otras cosas que forman también parte de su sentido).

1.2.3. El aprendizaje.

La construcción axiomática sugiere también un aprendizaje férico donde el volumen de conocimientos –inmediatamente adquiridos, estructurados, utilizables y transferibles– se infla en un espacio virgen. Pero...

– Una noción aprendida no es utilizable más que en la medida en que ella está relacionada a otras, estas relaciones constituyen su significación, su etiqueta, su método de activación.

– Pero ella no es aprendida más que en la medida en que ella es utilizable y utilizada efectivamente, es decir solamente si ella es una solución del problema. Estos problemas, conjunto de restricciones a las cuales responde, constituyen la significación de la noción. Ella no es aprendida más que si ella "tiene éxito" y hace falta por tanto un territorio de puesta en práctica. Este territorio no es más que raramente general y definitivo.

– Del hecho de este empleo localizado, la noción recibe particularizaciones, limitaciones, deformaciones de lenguaje y de sentido: si esta concepción particular de la noción es inmediatamente eliminada por otra más económica, o más general, o menos falsa, ella no es aprendida y no puede servir para crear el sentido de las adquisiciones posteriores.

– Si tiene éxito suficientemente bien y por un tiempo suficiente, toma un valor, una consistencia, una significación, un desarrollo que hacen cada vez más difícil su modificación, su reconsideración, su generalización o su rechazo: se convierte a la vez, para las adquisiciones posteriores, un obstáculo pero también un punto de apoyo. Esto muestra:

– Porqué el aprendizaje no puede hacerse según el esquema clásico de la adquisición progresiva y continua (tal que para toda adquisición existe una sucesión finita de adquisiciones que aportan, cada una, una cantidad de información tan pequeña como se quiera y como le sea equivalente). Y en consecuencia,

– porqué la confusión entre algoritmo de establecimiento de una fórmula y algoritmo de adquisición de un saber está desprovista de fundamento.

1.2.4. Algoritmo y razonamiento.

He estudiado sobre varios ejemplos todas las consecuencias nefastas de esta confusión sobre el aprendizaje de las operaciones en N.

Enseñando por los mismos procedimientos, a la misma edad, tanto una teoría sofisticada, la de probabilidades y de estadísticas, como esos pretendidos "mecanismos" de operación, creo haber mostrado que esta separación entre mecanismo y razonamiento no era ni necesaria ni, aun, útil; el aprendizaje se hace por la puesta a prueba de concepciones sucesivas, provisoria y relativamente buenas, que será necesario rechazar sucesivamente o retomar en una verdadera epistemología, nueva cada vez.

Si las condiciones lo exigen, el alumno puede él mismo resumir en "automatismo" actividades complejas, retirando sentido y posibilidades de elección a su actividad. Pero para que esos automatismos puedan ser utilizados es necesario que sean establecidos por el sujeto mismo.

1.2 5. Obstáculos.

Los trabajos conformes a las concepciones de Bachelard y de Piaget muestran también que el error y el fracaso no tienen el rol simplificado que en ocasiones uno quiere hacerles jugar. El error no es solamente el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar que uno cree en las teorías empiristas o conductistas del aprendizaje, sino el efecto de un conocimiento anterior, que tenía su interés, su éxito, pero que, ahora, se revela falso, o simplemente inadaptado. Los errores de este tipo no son erráticos e imprevisibles, se han constituidos en obstáculos. Tanto en el funcionamiento del maestro como en el del alumno, el error es constitutivo del sentido del conocimiento adquirido.

1.3. Importancia de la enseñanza organizada por los problemas.

1.3.1. Interacciones.

Admitiremos por tanto que la constitución del sentido, tal como lo entendemos, implica una interacción constante del alumno con .situaciones problemáticas, interacción dialéctica (porque el sujeto anticipa, finaliza sus acciones) donde él compromete conocimientos anteriores, los somete a revisión, los modifica, los completa o los rechaza para formar concepciones nuevas. El objeto principal de la didáctica es justamente estudiar las condiciones que deben cumplir las situaciones o los problemas propuestos al alumno para favorecer la aparición, el funcionamiento y el rechazo de esas concepciones.

Puede deducirse de ese régimen discontinuo de adquisiciones que los caracteres informacionales de esas situaciones deben también variar por saltos.

1.3.2. Condiciones

En esas condiciones el interés de un problema va a depender esencialmente de lo que el alumno comprometerá ahí, de lo que ahí meterá a prueba, de lo que invertirá, de la importancia para él de los rechazos que será conducido a hacer, y de las consecuencias previsibles de esos rechazos, de la frecuencia con la cual arriesgaría cometer esos errores rechazados y de su importancia.

Así los problemas más interesantes serán aquellos que permitirán franquear un verdadero obstáculo. Es porque, a propósito de problemas, he querido examinar la cuestión de los obstáculos en didáctica.

2. La Noción de Obstáculo.

2.0. Obstáculos epistemológicos.

El mecanismo de la adquisición de conocimientos tal como lo hemos descrito antes puede aplicarse tanto a la epistemología o a la historia de las ciencias, como al aprendizaje y a la enseñanza. En un caso como en el otro, la noción de obstáculo aparece como fundamental para plantear el problema del conocimiento científico. Hay que referirse a Bachelard quien fue el primero en adelantar esta idea.

"No se trata de considerar los obstáculos externos como la complejidad, la fugacidad de los fenómenos, ni de incriminar la debilidad de los sentidos y del espíritu humano; es en el acto mismo de conocer íntimamente que aparecen por una suerte de necesidad funcional lentitudes y problemas... Uno conoce contra un conocimiento anterior".

2.0.1 Bachelard estudia esos obstáculos en las ciencias físicas: la experiencia primera, el conocimiento general, el obstáculo verbal, la utilización abusiva de imágenes familiares, el conocimiento unitario y pragmático, el obstáculo substancialista, realista, animista, aquel del conocimiento cuantitativo.

Son grandes obstáculos que han resistido largo tiempo. Es probable que tengan su equivalente en el pensamiento del niño. El medio ambiente material y cultural actual ha, sin duda, modificado un poco las condiciones dentro de las cuales los niños encuentran esos obstáculos, y los estudios de ese sujeto están en curso.

2.0.2. En matemáticas, un trabajo muy importante de epistemología ha sido emprendido en direcciones vecinas de las de Bachelard, en el ámbito de Althusser, por gentes como P. Raymond, Badiou, Ovaert, Hanzel,... etcétera.

No proporciona, de momento, una lista de obstáculos tan simple como la de Bachelard; pero, grandes rasgos se desprenden así como clases de obstáculos, porque la noción de obstáculo misma está en vías de constituirse y de diversificarse; no es fácil decir generalidades pertinentes sobre el tema, vale más hacer estudios caso por caso. Puede decirse que al lado del trabajo de registro y descripción de los grandes obstáculos a la constitución de conceptos, se desarrollan estudios que tratan sobre las características de funcionamiento de los conocimientos, a la vez como apoyo y como obstáculo (alternativamente y dialécticamente). Además, la noción de obstáculo tiene tendencia a extenderse fuera del campo estricto de la epistemología: en didáctica, en psicología, en psico-sociología, etcétera....

2.1. Manifestación de los obstáculos en didáctica de las matemáticas.

2.1.1 Errores.

Un obstáculo se manifiesta, por tanto, por sus errores, pero esos errores no son debidos al azar.

Fugaces, erráticos, son reproducibles, persistentes.

Además esos errores, en un mismo sujeto, están ligados entre ellos por una fuente común, una manera de conocer, una concepción característica, coherente si no correcta, antigua y que ha tenido éxito en todo un dominio de acciones.

Esos errores no son forzosamente explicitables.

Sucede que no desaparecen radicalmente, de un sólo golpe, que resisten, que persisten, luego resurgen, se manifiestan mucho tiempo después que el sujeto haya rechazado de su sistema cognoscitivo consciente el modelo defectuoso.

Ejemplo: un estudiante utiliza el "teorema" siguiente:

"Si el término general de una serie tiende hacia cero, la serie converge".

¿Está distraído?, ¿recita mal --invirtiendo hipótesis y conclusión-- un teorema del curso?, ¿ha comprendido mal la noción del límite?, ¿o la de serie?, ¿es un error sobre las condiciones necesarias y suficientes?

Aproximando este error a algunos otros, se comprende que de manera inconsciente este estudiante haya hecho un cierto razonamiento, falseado por una representación incorrecta de las reales que remonta a la enseñanza primaria y secundaria.

El razonamiento es más o menos éste: "si x_i tiende hacia cero, existe un rango n a partir del cual los x_i son despreciables; a partir de ese n uno no suma prácticamente nada, luego la serie converge".

Puede ser que este estudiante no escribiría este razonamiento sin percatarse de que es falso, pero le parece evidente, porque reposa sobre una práctica constante en la enseñanza primaria y secundaria: el teorema siguiente:

"$\forall x \varepsilon R \quad (0 \text{ en } Q)\ \forall \varepsilon > 0\ \exists\ d\ \varepsilon\ D : |x - d| < \varepsilon$"

es interpretado implícitamente y en ocasiones explícitamente por:

"En todo cálculo práctico $\exists\ n\ \varepsilon\ N$ tal que $\forall\ x\ \varepsilon\ R$, $\exists\ d\ \varepsilon\ D$ tal que $[\ |x - d| < 10^{-n} \Rightarrow (x - d)$ es "prácticamente despreciable", es decir nulo]. (D es el conjunto de decimales).

Esta idea se apoya sobre una "mala" definición de los decimales vehiculada desde la enseñanza elemental y sobre la cual regresaremos más adelante.

2.1.2. Franqueamiento.

El obstáculo está constituido como un conocimiento con objetos, relaciones, métodos de aprehensión, previsiones con evidencias, consecuencias olvidadas, ramificaciones imprevistas... Va a resistir el rechazo, tentará, como se debe, de adaptarse localmente, de modificarse al menor precio, de optimizarse sobre un campo reducido siguiendo un proceso de acomodamiento bien conocido.

Es por eso que hace falta un flujo suficiente de situaciones nuevas, no asimilables por él, que van a desestabilizarlo, a rendirlo ineficaz, inútil, falso, que van a hacer necesaria la reconsideración o el rechazo, el olvido, la "scotomisation" hasta en sus últimas manifestaciones.

También, franquear un obstáculo exige un trabajo de igual naturaleza que el establecimiento de un conocimiento, es decir, interacciones rechazadas, dialécticas del alumno con el objeto de su conocimiento.

Esta observación es fundamental para distinguir lo que es un verdadero problema; es una situación que permite esta dialéctica y que la motiva.

2.1.3. Características informacionales de un obstáculo.

Un conocimiento, como un obstáculo, es siempre el fruto de una interacción del alumno con su medio y más precisamente con una situación que hace el conocimiento "interesante" –quiero decir "óptima" en un cierto dominio definido por características numéricas "informacionales" de este conocimiento.

El conocimiento, el hombre y el medio siendo lo que son, es inevitable que esta interacción desemboque a concepciones "erróneas". De todos modos estas concepciones son comandadas por las condiciones de la interacción que uno puede más o menos modificar. Es el objeto de la didáctica.

Esta declaración tiene importantes consecuencias, en principio para la enseñanza: así, si uno quiere desestabilizar una noción bastante enraizada, será ventajoso que el alumno pueda invertir suficientemente sus concepciones dentro de situaciones

– bastante numerosas e importantes para él

– y sobre todo, con condiciones informacionales suficientemente diferenciadas para que un salto cualitativo sea necesario.

Ejemplo: un niño de seis años sabe distinguir los números hasta 4 o 5 con la ayuda de procedimientos basados sobre la percepción. Estos procedimientos se vuelven rápidamente muy "costosos" y poco fiables desde que el número de objetos pasa a 6 o 7. Fracasan más allá. Si uno no trata de enseñar en orden los números 6, luego 7, enseguida 8, uno se encuentra con dificultades numerosas y crecientes y un periodo de desarrollo aparece.

Al contrario, si uno propone el comparar colecciones del orden de 10 a 15 objetos, el modelo perceptivo es tan evidentemente desventajoso que el niño renuncia de inmediato y establece nuevas estrategias (correspondencia término a término). Lo que uno quiere llamar intuición no es, a menudo, más que la aprehensión inconsciente de los límites informacionales de los modos de conocimiento.

2.2. Origen de los diversos obstáculos didácticos.

2.2.0. Origen de un obstáculo.

Vamos ahora a considerar los obstáculos que se presentan en el sistema didáctico. Esos obstáculos a la apropiación por el alumno de ciertas nociones pueden ser debidos a varias causas. Es difícil incriminar solamente uno de los sistemas en interacción. Es otra consecuencia de la concepción del aprendizaje evocada anteriormente.

La noción de obstáculo epistemológico tiende a substituirse por la de error de enseñanza, de insuficiencia del sujeto o de dificultad intrínseca de los conocimientos.

En todo caso, se pueden distinguir los orígenes de los obstáculos didácticos: éste será el sistema tal que, modificándolo, se podría evitar el obstáculo, mientras que ninguna modificación de los otros sistemas permitiría evitarlo.

Uno encontrará así obstáculos didácticos

– de origen ontogénico

– de origen didáctico

– de origen epistemológico.

Para el ejemplo anterior (relativo a la adquisición de la noción de número) hablaremos más bien de limitación neurofisiológica que de obstáculo.

2.2.1. Origen ontogénico.

Los obstáculos de origen ontogénico son los que sobrevienen del hecho de las limitaciones (neurofisiológicas entre otras) del sujeto a un momento de su desarrollo: él desarrolla conocimientos apropiados a sus medios y a sus objetivos.

La epistemología genética pone en evidencia etapas, acomodamientos y asimilaciones, que, a la vez, se asemejan a las etapas del desarrollo de los conceptos por las leyes de regulación que los hacen aparecer, y difieren de ellas por la naturaleza exacta de las limitaciones que determinan esas regulaciones.

2.2.2. Obstáculos de origen didáctico.

Los obstáculos de origen didáctico son los que parecen no depender más que de una elección o de un proyecto de sistema educativo. Por ejemplo la presentación actual de los decimales en el nivel elemental es el resultado de una larga evolución en el marco de una selección didáctica hecha por los enciclopedistas y luego por convención (conforme a una concepción que remonta a S. Stevin mismo): teniendo en cuenta su utilidad, los decimales iban a ser enseñados a todo mundo lo antes posible, asociados a un sistema de medida, y refiriéndose a las técnicas de operación en los enteros. Así, hoy, los decimales son, para los alumnos "enteros naturales con un cambio de unidad", por lo tanto "naturales" (con un punto) y medidas. Y esta concepción, apoyada por una mecanización del alumno, va a hacer obstáculo hasta el DEUG (Diploma de Estudios Universitarios Generales).

Es característico que el principal factor de discriminación de los alumnos en un cuestionario reciente (IREM de Rouen) sea el cálculo haciendo intervenir, a la vez, decimales y productos por una potencia de diez. Así, es la "comprensión" misma de la definición de los decimales lo que explica los comportamientos de los alumnos. Pero actualmente, un obstáculo tal se ha convertido, a la vez didáctico y sociocultural.

2.2.3. Obstáculos didácticos de origen epistemológico.

Los obstáculos de origen propiamente epistemológico son aquellos a los cuales uno no puede, ni debe escapar, del hecho mismo de su rol constitutivo en el conocimiento a que se apunta. Uno puede encontrarlos en la historia de los conceptos mismos. Eso no quiere decir que se deba amplificar su efecto ni que deban reproducirse en el medio escolar las condiciones históricas en las que han sido vencidos.

2.3. Consecuencias para la organización de situaciones problemáticas.

La concepción del aprendizaje, que se apoya sobre el estudio del desarrollo de los conocimientos en términos de obstáculos, difiere sensiblemente de la concepción clásica, sobre todo en lo que concierne al rol y a la organización de las situaciones de problemas. Y esto, tanto más que el problema va a jugar, en el proceso, un rol fundamental.

2.3.1. Motivaciones-condiciones.

Plantear un problema consiste en encontrar una situación con la cual el alumno va a emprender una sucesión de intercambios relativos a una misma cuestión que forma un "obstáculo" para él, y sobre el cual va a apoyarse para apropiarse, o construir, un conocimiento nuevo.

Las condiciones en las cuales se desarrolla esta sucesión de intercambios son inicialmente escogidas por el que enseña pero el proceso debe muy rápido, pasar, en parte, bajo el control del sujeto que va a "cuestionar" a su vez la situación. La motivación nace de esta inversión y se conserva con ella. En lugar de ser un simple motor exterior, de frustraciones equilibrándose, ella es constitutiva a la vez del sujeto (de su palabra) y de su conocimiento. Así, la resolución de un problema tomará para el alumno la apariencia de una especie de proceso experimental, la ocasión dada a la "naturaleza" (aquí, a los conceptos matemáticos) de manifestarse dentro de sus actividades.

2.3.2. Carácter dialéctico del proceso de franqueamiento de un obstáculo. El proceso de franqueamiento de un obstáculo comporta necesariamente una sucesión de interacciones entre el alumno y el medio; esta sucesión de interacciones no toma sentido más que en la medida en que se reportan a un mismo proyecto (en el alumno) a propósito de un concepto en cuya génesis ellas constituyen una etapa y el cual funden la significación.

Esas interacciones meten en juego sistemas de representación y pueden a menudo ser interpretados como intercambios de mensajes. Además, el maestro y el alumno son capaces de anticipación y finalizan sus acciones. Éstas toman, en consecuencia, un carácter dialógico; además las informaciones intercambiadas son recibidas como hechos que confirman o niegan las hipótesis o aún como aserciones.

Si se admite que un conocimiento se establece oponiéndose a otro, sobre el cual se apoya y al cual reemplaza, se comprenderá que podamos decir que los procesos de franqueamiento tienen un carácter dialéctico: dialécticas del a priori y del a posteriori, del conocimiento y de la acción, del yo y de los otros… etcétera.

Organizar el franqueamiento de un obstáculo consistirá en proponer una situación susceptible de evolucionar y de hacer evolucionar al alumno según una dialéctica conveniente. Se tratará, no de comunicar las informaciones que se quieren enseñar, sino de encontrar una situación en la cual ellas son las únicas satisfactorias u óptimas –entre aquellas a las cuales ellas se oponen– para obtener un resultado en el cual el alumno se ha involucrado.

Esto no es suficiente; será necesario que esta situación permita de entrada la construcción de una primera solución o de una tentativa donde el alumno invertirá su conocimiento del momento. Si esta tentativa fracasa o no conviene bien, la situación debe, sin embargo, reenviar una situación nueva modificada por este fracaso de forma inteligible pero intrínseca, es decir que no dependa de manera arbitraria de las finalidades del maestro.

La situación debe permitir la repetición o voluntad de la puesta a prueba de todos los recursos del alumno. Ella debe automotivarse por un juego sutil de sanciones intrínsecas (y no por sanciones extrínsecas ligadas por el maestro a los progresos del alumno). Ella no puede, por tanto, ser programada; es solamente su elección la que puede serlo.

Se trata, para el dialéctico, de identificar al mismo tiempo que una etapa de un concepto, una situación que pone al alumno una pregunta (del alumno) a la cual esta etapa sea una respuesta "construible" en el sistema del alumno.

Hemos sido conducidos a distinguir en el funcionamiento del alumno tres tipos de preguntas que comandan tres tipos de situaciones didácticas.

2.3.3. Diferentes tipos de problemas: validaciones, formulaciones, acciones.

a) Las cuestiones de validación: el alumno debe establecer la validez de una afirmación: debe dirigirse como un sujeto a otro sujeto susceptible de aceptar o de rehusar sus afirmaciones, de pedirle administrar pruebas de lo que anticipa, de oponerle otras afirmaciones.

Esos intercambios contribuyen a hacer explicitar las teorías matemáticas pero también a establecer las matemáticas en tanto que medio de [validación]. Se trata menos de aprender las pruebas aceptadas que de poner a prueba aquellas que uno concibe. Un proceso de prueba se construye en una dialéctica de la validación que conduce al alumno, sucesivamente, a usar espontáneamente figuras de retórica y enseguida a renunciar a ellas. Las relaciones que el alumno debe poder establecer para ello son específicas de esta dialéctica (ver Brousseau 70).

Un problema de validación es mucho más un problema de comparación, de evaluación, de rechazo de pruebas, que de búsqueda de la demostración.

b) Las cuestiones de formulación: para sus procesos de validación, el pensamiento debe apoyarse sobre formulaciones previas. Los lenguajes se elaboran también dentro de dialécticas menos específicas que las de la validación. La comunicación (y sus restricciones) juega ahí un gran papel independiente, en parte, de los problemas de validez. Es dentro de ese marco que se manifiestan mejor las restricciones de economía que comandan las selecciones matemáticas juiciosas.

c) Las cuestiones de acción o de decisión matemática son aquellas donde el único criterio es la adecuación de la decisión –el sistema de elaboración de esta decisión puede quedar totalmente implícito, así como su justificación. No hay, a ese respecto, restricción alguna: ni de formulación ni de validación. Es la dialéctica más general, las otras son sólo casos particulares.

Ella desemboca en la construcción, en el sujeto, de regularidades, de esquemas, de modelos de acción, los más frecuentemente inconscientes o implícitos.

2.3.4. Dialéctica y obstáculos.

Bien entendido, ninguna de esas dialécticas es independiente de las otras, al contrario.

La formulación se facilita, a menudo, si existe un modelo implícito de acción: el sujeto sabe formular mejor un problema que ha sabido resolver.

La acción se facilita mediante una formulación conveniente (como lo ha mostrado Vigotski). El lenguaje "recorta" la situación en objetos y relaciones pertinentes. La acción proporciona un tipo de validación implícita fundamental y la formulación, otro.

Pero inversamente, cada dominio puede obstaculizar un progreso dentro de los otros. Ciertas cosas se hacen mejor de lo que ellas dicen. Los modelos implícitos toman mejor, juntos, un gran número de datos y son más dóciles, más fáciles de re-estructurar. Las condiciones demasiado favorables a la acción vuelven inútil la explicación: por ejemplo, en tanto que se utilizaron los sistemas sexagesimales babilónicos para los cálculos astronómicos, el punto no se impuso, ni el nombre de la unidad de referencia, pues un error de 1 a 60 era impensable para quien sabía de lo que hablaba.

Igualmente, un lenguaje demasiado fácil de manejar puede bloquear por mucho tiempo una reformulación necesaria... (Es el obstáculo verbal de Bachelard).

El franqueamiento de un obstáculo implica, muy a menudo, a la vez una re-estructuración de los modelos de acción, del lenguaje y del sistema de pruebas. Pero el dialéctico puede precipitar las rupturas, favoreciendo la multiplicación y la alternancia de dialécticas particulares.

Nos hemos entretenido demasiado sobre las generalidades. No es posible comprender las relaciones recíprocas de los obstáculos y de los problemas sin un estudio específico.

3. Problemas en la Construcción del Concepto de Decimal.

3.1. Historia de los decimales.

3.1.1. No es posible, en el cuadro de este artículo, presentar una epistemología de los decimales. Tal epistemología queda por hacerse.

Es difícil a causa del "reguero" sobre quince o veinte siglos, de hechos a tomar en cuenta. En cada "etapa" uno cree que no hay más que un paso a franquear, pero no es así, y es raramente por falta de haber tratado. Hay que comprender lo que ese paso tenía de inconcebible; y a menudo, también lo que él hacía perder con respecto al estado precedente.

3.1.2. Los chinos tenían un sistema de medida decimal en el siglo XIII A. C.; los babilonios, la numeración de posición; los pitagóricos concebían el conjunto de las fracciones, y

Arquímedes ha contribuido a concebir las fracciones como razones; sin embargo será necesario esperar a los árabes (Abu'l-Wafa, 2ª mitad del siglo X) para ver la noción de razón aplicarse a las fracciones y esa razón tenderá a identificarse a los números. Pero hay que esperar a Al Kashi (1427) e independientemente a S. Stevin (1585) para que los decimales aparezcan.

3.1.3. Este último utilizaba la misma notación para el estudio de los números geométricos –de hecho, los polinomios con coeficientes enteros– y no es por azar. Se habían utilizado los decimales antes de él (Bonfils de Tarascón (1350); Regiomontanus (1563)...). Pero él es el primero en proponer substituir las fracciones decimales a las fracciones racionales y de denotarlas de manera de permitir llevar los cálculos a las reglas conocidas en los naturales, "cosa tan simple que no merece el nombre de invención", dice modestamente este nativo de Brujas; ella "enseña fácilmente a expedir por números enteros, sin 'rompuz', todas las cuentas que se encuentran en los negocios de los hombres". Pero ve todo el interés y pide que "se ordene además la susodicha décima partición a fin de que cualquiera que quisiera la pudiese usar".

3.2. Historia de la enseñanza de los decimales.

3.2.1. La "vulgarización" de los decimales se convierte entonces en un problema de didáctica, y serán necesarios dos siglos para franquear el primer paso: Gobán en 1711 nos da cuenta en una obra destinada a los mercaderes; D´Alembert, en 1779, presenta en la Enciclopedia (en el artículo Decimal) la cuestión en su forma matemática. En la edición de 1784 el Abad Bossut presenta los decimales a la manera de un naturalista: son enteros con un punto para presentar las medidas. El aspecto fracción decimal es relegado en un "apéndice". Una fractura se anuncia entre las fracciones decimales y los "decimales populares" a los algoritmos, tan maravillosamente simples, que van a permitir vulgarizar totalmente la contabilidad comercial. La cuestión no está regulada por la decisión de la convención; lo que está en juego es demasiado grande a todo lo largo del siglo XIX, el aspecto político del problema didáctico se impone: hay que luchar. Así, Carlos X reintroduce nuevas medidas de longitud de 6 nuevos pies y no conserva del sistema métrico más que sus normas arbitrarias.

3.2.2. Los esfuerzos de vulgarización fueron facilitados por la elección del sistema métrico. La generosidad de las intenciones revolucionarias ha conducido a enseñar los "mecanismos" independientemente de las justificaciones matemáticas (había que lograr, en tres años, dar

(es suficiente proponer ejercicios donde, a la vez, se cambia de unidad y se multiplica por una potencia de 10 para percibirlo).

todo lo que era esencial para el ciudadano). Esas conquistas del siglo XIX van a crear obstáculos en el siglo XX, en el cual ya no se trata de comunicar la instrucción, sino de educar, de hacer comprender.

Los métodos activos, aplicados al sistema métrico van a hacer, progresivamente, desaparecer el decimal en tanto que razón, que fracción, quedaba algo a propósito de los cambios de unidad, pero la eficacia para unos, la no directividad de otros, contribuyen a hacer desaparecer los últimos discursos justificadores.

3.2.3. Hoy, en Francia al menos, la ruptura está consumada oficialmente. Los programas de 1970 han introducido una construcción (no acabada) de los racionales que consiste en construir esas excelentes aplicaciones a partir de los malos operadores que son los naturales.

Esta construcción no sirve para nada, ni a la introducción ni a la comprensión, ni al estudio de los decimales: dos continentes se han separado. Y lo son sobre todo en las concepciones mismas de los maestros y de los padres.

3.3. Obstáculos didácticos a la construcción de los decimales.

Así, una renovación de la enseñanza de los decimales se librará hoy a numerosas dificultades técnicas y socio-económicas: ¿cuál será el precio? No hemos querido estudiar más que las cuestiones de epistemología experimental en condiciones escolares normales para el niño.

También, las soluciones que estudiamos no son aplicables, en el actual estado de cosas, por el conjunto de los maestros. No podemos dar aquí en detalle el análisis de todos los obstáculos, sugiero al lector un texto en preparación, actualmente. Por lo tanto, me contentaré con evocar los más importantes.

3.3.1. El hecho de ligar los decimales con las medidas conduce a hacer que el alumno los considere como una tercia (n, p, u): por una parte un entero n y por otra parte una división por 10_P, es decir un cambio de unidad, y una unidad u: 3.25 metros, 325 centímetros expresados en metros.

La práctica de los "cambios de unidad" hacen que p y u mantengan relaciones privilegiadas (es suficiente proponer ejercicios donde, a la vez, se cambia de unidad y se multiplica por una potencia de 10 para percibirlo).

El decimal funciona como un entero y ya no es desprendible de una unidad: el objeto no es el decimal sino la magnitud física. El alumno no puede entonces interpretar el producto de dos decimales mas que en el caso, por ejemplo, del producto de dos longitudes, lo que lo lleva a los obstáculos bien conocidos de los números concretos: tendrá problemas para concebir $a^2 + a$ y arrastrará implícitamente las ecuaciones a las dimensiones.

Los decimales serán limitados implícitamente al rango de las unidades más pequeñas practicadas regularmente (o aun, tendrán dos cifras después del punto, como los francos).

El niño razona como si existieran átomos simplemente más pequeños que la incertidumbre tolerable sobre las medidas y como si todos los números fueran números enteros.

3.3.2. 3.25 es 325 con la centena como unidad, dicen los comentarios oficiales; todas las relaciones topológicas van a ser perturbadas y por mucho tiempo: el niño no encontrará un decimal entre 3.25 y 3.26; pero en cambio, encontrará un predecesor en D para 3.15: éste será 3.14, etc.,... Aún si él corrige su respuesta sobre tal o tal punto, los razonamientos intuitivos van a ser guiados por ese modelo erróneo (encontraremos errores sobre este punto, como el señalado antes, hasta la universidad).

Esta asimilación a los naturales será evidentemente reforzada por el estudio de las operaciones bajo la forma de mecanismos, es decir de acciones que se efectúan de memoria, sin comprender, como en los naturales, con solamente un pequeño complemento para el punto.

De cabeza, el cálculo seguirá otra pendiente. Se calculará el producto de la parte entera y el de la "parte decimal" y se pegarán los pedazos:

$(0.4)^2 = 0.16$, pero $(0.3)^2 = 0.9$ y algunas veces $(3.4)^2 = 9.16$.

Es, todavía, el efecto de la medida: lo que más cuenta es la parte entera; la parte decimal hace lo que puede.

3.3.3. Evidentemente, la asimilación a los naturales no va a pasar sin dificultad en el caso de ciertas divisiones que arriman el desorden en el edificio, pero el modelo no será rechazado por ello; serán los números que "no son exactos" de los que uno huirá, índices de que uno se ha equivocado en algún lado. Se aproximarán, a lo mejor, se dirá que "están entre tal y tal números" (sin definirlos) pero el alumno les temerá.

La definición implícita de los decimales "naturales con punto" hará que, para los alumnos, los naturales no sean decimales, pero 0.333 será un decimal.

Una de las peores consecuencias de este obstáculo será, a menudo, el hacer pasar, a los ojos de los alumnos, las tentativas demasiado tímidas y demasiado tardías de franquearlos (en 4° por ejemplo) mediante razonamientos y desvarios sin objetos.

3.4 Obstáculos epistemológicos – Plan didáctico.

Los obstáculos arriba mencionados son todos de origen didáctico. Los verdaderos obstáculos epistemológicos e históricos son otros.

3.4.1. Se trata en principio de simetrizar N para la multiplicación. Se pueden concebir algunas fracciones, pero rápidamente se quiere poder obtenerlas "todas" y poder, al menos, sumarlas y multiplicarlas por un entero. Es indispensable, no el enseñar la construcción, sino plantear el problema. Es necesario que el niño vea que no puede "pasársela" con los naturales y saque todas las consecuencias, sobre todo acerca del orden.

Hemos mostrado que el niño a los 10 años, puede inventar Q^+ para resolver ese problema (ver más adelante el problema de las hojas de papel). Yo no creo que D pudiera satisfacerlo en ese momento y no veo cómo y por qué él lo inventaría.

3.4.2. En cambio, una vez construido $(Q^+,+,<)$ y colocado frente a la necesidad de ordenarlos, por ejemplo, o de sumar muchas fracciones, el niño puede ser conducido a utilizar, de preferencia, las fracciones decimales y a ver que ellas "aproximan" las otras fracciones (que D está dentro de Q). Hemos mostrado también que esto es posible con la ayuda del "problema del explorador" y la dialéctica que de ahí se sigue.

El problema es inverso del precedente. Se trata, ya no de inventar y de combinar los elementos de un conjunto desconocido y nuevo, sino al contrario, de aproximar un conjunto conocido con una subfamilia bien escogida.

3.4.3. Un texto por aparecer dará el detalle de los 25 "problemas" que constituyen la dialéctica (que dura 60 horas), pero soy opuesto a extraer de su contexto los ejemplos que doy en el párrafo siguiente con comentarios insuficientes:

*Todo ahí es cuestión de equilibrio. Por ejemplo, si los niños mecanizan el cálculo en Q, la invención de D tarda y su uso se dificulta. Si no es conocido suficientemente, D no se construye ni se comprende.

*Hay, por ejemplo, que cuidarse de "reconocer" demasiado aprisa las prácticas conocidas: los niños saben acotar un racional entre dos decimales tan vecinos como ellos quieran, mucho antes de descubrir que esta práctica es "la división" y la de instituir en algoritmo.

*Sin embargo, no hay que dejar demasiado tiempo los grandes problemas al nivel implícito. Las dialécticas de la formulación y la organización frecuente de debates conduce al nivel consciente aquello que debe ser sabido.

3.4.4. El segundo gran obstáculo, es la concepción de los racionales y de los decimales en tanto que razones, en tanto que aplicaciones lineales que operan dentro de Q.

En una situación propicia (ver el problema del rompecabezas) los niños construyen este conjunto de aplicaciones primero; luego, otros que será necesario designar: las fracciones o los decimales o los naturales se prestarán a esta designación.

La suma, la composición de esas aplicaciones, luego la descomposición sobre D, proporcionarán un modelo unificador de Q, de N y de D.

3.5. Tres ejemplos de problemas que permiten el franqueamiento de obstáculos.

3.5.6. El problema de las hojas de papel (lecciones 1 a 3).

Es un problema de comunicación; los niños deben inventar un lenguaje para indicar a sus compáñeros de cuál montón han escogido una hoja de papel. El juego se juega realmente: los niños buscan un sistema para designar el espesor de las hojas. Después de algunos intentos, ellos imaginan hacer un pequeño montón del cual se puede medir el espesor con un doble decímetro. Envía el número de hojas y el espesor (entero); ejemplo (19; 3).

Es un ejemplo de dialéctica de la formulación. Los errores, las contestaciones, las comparaciones; los conducen a explicitar las condiciones de empleo de esas parejas: equivalencia, errores de medición... y a designar las clases.

Los problemas de previsión (¿cuál será el espesor de un cartón obtenido al pegar tal, tal y tal hoja?) donde el criterio de éxito es la experiencia y la aceptación por todos los niños, los debates científicos (¿las parejas son números?) conducen a los niños a explorar Q^+.

3.5.2. El problema del explorador (lecciones 12 a 15).

Dos jugadores (o dos equipos) se enfrentan. Cada uno escoge una fracción comprendida entre (0 y 10), la cual esconde al otro jugador; ejemplo:

A escoge $\frac{2}{3}$ y B, $\frac{45}{10}$

Por turno, los jugadores escogen un intervalo y lo proponen.

Ejemplo: A escribe [3; 4]. Si la fracción de B pertenece al intervalo éste anuncia: "tú me ves". Si está en el exterior, "tú no me ves". Si está en el origen del intervalo, "tú me atrapas".

Aquí, B dice: "tu no me ves".

Para comparar sus fracciones, los alumnos "convierten al mismo número de hojas" (operación conocida sin ser mecanizada). El ganador es aquel que, cuando el juego se para, "ve" al otro dentro del intervalo más pequeño. Al principio, los niños creen poder adivinar todas las fracciones. Desarrollan estrategias de filtración (la filtración lineal y decimal aparecen). Distinguen fracciones fáciles y difíciles de atrapar.

Toda la topología de Q^+ se establece contra la de N, en una dialéctica que podría hacer pensar a la del obús y la coraza.

3.5.3. El problema del rompecabezas (lección 25).

"He aquí rompecabezas de TANGRAN como los que ustedes han utilizado en el club de matemáticas. Fabriquen algunos semejantes, más grandes. Por ejemplo, este lado mide 4 cm., su imagen deberá medir 7 cm. Trabajen por equipos, pero repártanse el trabajo, verifiquen enseguida que el rompecabezas funciona como se debe".

Por supuesto, si $f(a+b) \neq f(a) + f(b)$, el resultado no será, visiblemente, bueno. De lo cual se siguen discusiones, nuevos intentos, rechazo de modelos defectuosos como $f(a) = a + k$.

Las condiciones que debe satisfacer la aplicación lineal (de Q^2 en Q^2) que éstas sean la conservación de los ángulos o la condición sobre la suma de las imágenes, son fatalmente puestas a prueba, formuladas.

matemática que funcionan con éxito en ese subconjunto de situaciones y para determinados valores de sus variables didácticas, pero que no son eficaces e, incluso, provocan errores al utilizarse en otro subconjunto de situaciones o al modificar las variables didácticas de la situaciones consideradas. Una concepción tiene, por tanto, un campo de problemas en el que funciona y otro campo de problemas en el que no permite resolver o, al menos, dificulta la resolución. De manera que la ampliación del campo de problemas va a obligar a la concepción a evolucionar, modificando alguno de sus aspectos, para adaptarse a las nuevas situaciones.

Pero, dentro de esta perspectiva y desde un punto de vista teórico, pueden plantearse otras alternativas a la evolución de concepciones. Por ejemplo, podría darse el caso de que, acerca de una misma noción matemática y en un mismo sujeto, aparecieran dos concepciones contradictorias ligadas a dos subconjuntos de situaciones diferentes, lo que, tarde o temprano, obligaría al sujeto a integrar las dos concepciones limando los aspectos contradictorios o a rechazar una de ellas. También podríamos encontrarnos con una concepción a la que ya no fuera posible hacer evolucionar para que asumiera nuevos campos de problemas, en cuyo caso no quedaría más alternativa que el rechazo de la concepción y su sustitución por otra.

En estos casos, en los que la ampliación del campo de problemas exige la sustitución de la concepción antigua, válida hasta ese momento, por una nueva y, además, el sujeto que la posee se resiste a rechazarla y trata, a pesar de la constatación de su fracaso, de mantenerla, de adaptarla localmente, de hacerla evolucionar lo menos posible, se dice que la concepción es un obstáculo. Y esa concepción obstáculo se pondrá de manifiesto a través de los errores que produce, errores que no serán fugaces ni erráticos, sino reproductibles y persistentes.

Brousseau expone sus primeras ideas sobre las nociones de concepción y obstáculo en diferentes artículos (1980, 1981, 1983, 1988, 1989a, 1989b). Entre ellas figura una clasificación de los obstáculos atendiendo a que su origen se sitúe en uno u otro de los polos del sistema didáctico -alumno, profesor y saber- o en la sociedad en general, lo que le permite distinguir entre obstáculo ontogenético, didáctico, epistemológico o cultural. En particular, califica un obstáculo de epistemológico si se puede rastrear en la historia de las matemáticas y la comunidad de matemáticos de una determinada época ha tenido que tomar conciencia de él y de la necesidad de superarlo. En este caso, el rechazo explícito del obstáculo forma parte del saber matemático actual.

Por otro lado, Duroux (1982) propone una lista de condiciones necesarias para poder calificar de obstáculo a una concepción. Esta lista, con algunas modificaciones introducidas por Brousseau, es la siguiente:

a) Un obstáculo será un conocimiento, una concepción, no una dificultad ni una falta de conocimiento.

b) Este conocimiento produce respuestas adaptadas a un cierto contexto, frecuentemente reencontrado.

c) Pero engendra respuestas falsas fuera de este contexto. Una respuesta correcta y universal exige un punto de vista notablemente diferente.

d) Además, este conocimiento resiste a las contradicciones con las que se le confronta y al establecimiento de un conocimiento mejor. No es suficiente poseer un conocimiento mejor para que el precedente desaparezca (lo que distingue la superación de obstáculos de la acomodación de Piaget). Es pues indispensable identificarlo e incorporar su rechazo en el nuevo saber.

e) Después de tomar conciencia de su inexactitud, el obstáculo continua manifestándose de forma intempestiva y obstinada. (Brousseau, 1989a, p. 43)

Como podemos ver, en la teoría de situaciones la noción de obstáculo epistemológico queda englobada en una categoría más amplia, la de obstáculo, que a su vez es un caso particular de otra noción más general, la de concepción. Además, la definición de obstáculo epistemológico conlleva, implícitamente, el establecimiento de un paralelismo entre las concepciones obstáculo que poseen los alumnos actuales y determinados conocimientos y saberes históricos que han obstaculizado la evolución de las matemáticas y cuyo rechazo ha sido incorporado al saber trasmitido. Esto induce a extender el concepto de concepción utilizándolo también como significante del estado de conocimiento propio de los matemáticos de otras épocas.

Aparece así el término 'concepción histórica' para referirse a la concepción que determinado matemático de otra época ha podido tener de una cierta noción matemática, siempre que esa concepción sea relevante, es decir, que represente la forma de pensar de una parte significativa de la comunidad de matemáticos de su tiempo. La determinación de estas concepciones históricas se hace a partir de la lectura de la obra escrita del matemático considerado.

2. Obstáculos epistemológicos en los números negativos: la aportación de Glaeser

La primera referencia a obstáculos epistemológicos en los números negativos aparece en un artículo de Glaeser publicado en 1981. En él, el autor manifiesta su intención de buscar los obstáculos que se oponen a la comprensión y aprendizaje de los números negativos. Para ello, y haciéndose eco de la "sorprendente lentitud" del proceso histórico de construcción del concepto de número negativo[1], busca los vestigios de esos obstáculos en el pasado, analizando, mediante una técnica de comentario de textos, lo que los matemáticos de distintas épocas[2] dijeron sobre dichos números.

[1] La lectura de los textos citados por Glaeser muestra que desde la primera formulación de la regla de los signos, hecha por Diofanto, hasta mediados del siglo XIX, se utilizan de continuo unos entes, los ahora llamados números negativos, que eran necesarios en muchas ramas de las matemáticas (álgebra, análisis, geometría analítica, trigonometría, etc.), pero que la comunidad matemática no sabía como encajar dentro de su cuerpo teórico. Los números negativos se usaban con profusión y sin dificultad, pero cuando los grandes matemáticos se veían obligados a dar explicaciones sobre su naturaleza, lo hacían en unos términos difícilmente concebibles hoy en día.

[2] Se citan textos de: Diofanto, Stevin, Descartes, Mc Laurin, Clairaut, Euler, Cramer, D'alembert, Carnot, Laplace, Cauchy y Hankel.

Ahora bien, aun cuando Glaeser empieza su artículo refiriéndose a la noción de obstáculo en Bachelard y Brousseau, enseguida aclara que considera prematuro precisar demasiado el término 'obstáculo' y que lo utiliza con un sentido amplio, equiparándolo a 'dificultad', 'umbral', 'síntoma', etc. En estas condiciones, el autor considera que en la evolución histórica de la noción de número negativo desde sus primeras emergencias hasta el concepto actual, se pueden constatar los siguientes obstáculos:

- *Falta de aptitud para manipular cantidades negativas aisladas.* Indica con esto el hecho, observable en la obra de Diofanto, de que la necesidad de efectuar cálculos algebraicos con diferencias y, en particular, la necesidad de multiplicar dos diferencias, le lleva a enunciar la regla de los signos y, sin embargo, no acepta la existencia de números negativos aislados.

- *Dificultad para dar sentido a las cantidades negativas aisladas.* En la obra de algunos matemáticos (Stevin, D'Alembert, Carnot y, posiblemente, Descartes) se constata que conciben la existencia de soluciones negativas de las ecuaciones, las "ven" y las tienen en cuenta, pero no pueden aceptarlas como cantidades reales y las justifican diciendo, por ejemplo, que son cantidades ficticias que expresan un defecto en el enunciado del problema.

- *Dificultad para unificar la recta real.* En el intento de sobrepasar el obstáculo anterior interpretando las cantidades negativas como cantidades reales, se observa que algunos matemáticos (McLaurin, D'Alembert, Carnot y Cauchy) concebían los negativos y los positivos en términos antinómicos: "lo negativo" neutralizaba, se oponía a "lo positivo", pero era de naturaleza distinta. Es decir, la cantidad negativa era tan real como la positiva, pero estaba tomada en un sentido opuesto. Esta heterogeneidad que se establecía entre negativos y positivos no facilitaba su unificación en una única recta numérica y, en cambio, favorecía el modelo de dos semirrectas opuestas funcionando separadamente.

- *La ambigüedad de los dos ceros.* Glaeser se refiere con esto a las dificultades que hubo entre los matemáticos (Stevin, McLaurin, D'Alembert, Carnot, Cauchy y, quizá, Euler y Laplace) para pasar de un cero absoluto, un cero que significaba la ausencia de cantidad de magnitud, a un cero origen elegido arbitrariamente. Uno de los razonamientos más extendidos entre los matemáticos que se oponían a la consideración de las cantidades negativas como cantidades reales y no como meros artificios del cálculo, era que no se podía admitir la existencia de cantidades que fueran "menos que nada"[3].

- *El estancamiento en el estadio de las operaciones concretas.* La superación de los obstáculos anteriores permite aceptar los números negativos como cantidades reales y justificar su estructura aditiva, pero no así la estructura multiplicativa. El problema de justificar la regla de los signos lo resolvió definitivamente Hankel en 1867, cuando propuso prolongar la multiplicación de $\mathbb{R}^+$ a $\mathbb{R}$ respetando un principio de permanencia que conservará determinadas "buenas propiedades" de la estructura algebraica de los reales positivos. Esto, a juicio de Glaeser, supone un cambio total de perspectiva en la resolución del problema:

[3] Hay que tener en cuenta, como muy bien señala Glaeser (1981, p. 239), que el establecimiento de las escalas de temperatura Celsius o Réaumur, uno de los hechos que pudo contribuir a la aceptación de un cero origen y de cantidades por debajo de cero, fue bastante tardío. Réaumur realizó sus primeros termómetros en 1730 y Celsius en 1742, pero tardaron casi un siglo en popularizarse.

> Ya no se trata de descubrir en la Naturaleza ejemplos prácticos que "expliquen" los números enteros de un modo metafórico. Estos números ya no son ***descubiertos***, sino ***inventados, imaginados***. (Glaeser, 1981, p. 337)

Se trata, por el contrario, de una justificación puramente formal basada en necesidades internas de las matemáticas.

Al hecho de creer que una noción matemática debe tener un referente en el mundo físico que le dé sentido y a partir del cual se puedan justificar sus propiedades, es a lo que Glaeser parece llamar "estadio de las operaciones concretas". Esta creencia se relaciona, según el autor, con una corriente ideológica muy amplia que se inicia en los *Elementos* de Euclides e impregna todo el pensamiento matemático hasta fines del siglo XIX. Se caracteriza por suponer que los objetos matemáticos son objetos del mundo físico que han sido suficientemente idealizados para poder insertarlos en un discurso hipotético-deductivo, lo cual permite que allí donde ese razonamiento deductivo no alcanza, pueda recurrirse al "pensamiento natural", el "sentido común" o la "intuición" como medio de justificación del discurso matemático. Pero esta forma de entender las matemáticas, que posee indudables ventajas, también tiene serios inconvenientes, como el que se plantea cuando a través del razonamiento deductivo se demuestran propiedades que repugnan a la "razón natural". Glaeser atribuye a matemáticos como Stevin, Euler, D'Alembert, Carnot y Laplace este tipo de ideología, mientras que la postura de Hankel representa la superación del obstáculo.

- *Deseo de un modelo unificador.* Es el deseo, largamente sentido por la comunidad matemática, de encontrar un buen modelo concreto que justifique tanto la estructura aditiva como la multiplicativa de los números enteros y que pueda ser comprendido con relativa facilidad por las personas que están en vías de aprenderlos. Su existencia hubiera evitado la necesidad de superar el obstáculo anterior, pero hasta hoy no ha sido encontrado y los que se utilizan habitualmente en la enseñanza, como, por ejemplo, el modelo de ganancias y pérdidas, sólo explican satisfactoriamente la estructura aditiva, pero a costa de convertirse en un obstáculo para la comprensión de la estructura multiplicativa. También aquí la obra de Hankel ha supuesto la superación del obstáculo al rechazar la búsqueda de un modelo explicativo de los enteros.

Glaeser concluye diciendo que sería necesario realizar experiencias con los alumnos para comprobar si alguno de los obstáculos puestos en evidencia en el estudio histórico se reproduce en los procesos de enseñanza actuales. Añade también que su investigación pone de manifiesto que los modelos concretos, habitualmente utilizados en la enseñanza de los números enteros, son un obstáculo para la comprensión de su estructura multiplicativa.

3. Obstáculos epistemológicos en los números negativos: otras aportaciones

Son varios los autores que, a raíz del trabajo de Glaeser, discuten el tema de los obstáculos epistemológicos en los números negativos. Entre ellos, Duroux (1982) hace hincapié en que la definición de obstáculo epistemológico propuesta por Brousseau exige que el obstáculo sea un conocimiento, no una falta de conocimiento. Teniendo esto en cuenta, Duroux considera que los dos primeros obstáculos epistemológicos propuestos por Glaeser:

la "falta de aptitud para manipular cantidades negativas aisladas" y la "dificultad para dar sentido a las cantidades negativas aisladas", no debieran ser considerados como tales pues sólo indican un déficit de conocimiento.

Sin embargo, la "dificultad para unificar la recta real", puede ser, según Duroux, un síntoma de una posible concepción obstáculo caracterizada por considerar a los números negativos como objetos de naturaleza distinta a los positivos. Añade, además, que la concepción del número como expresión de la medida de una cantidad de magnitud, concepción trasmitida por la enseñanza elemental, puede estar en la base de la diferente consideración de positivos y negativos, dado que entonces el número negativo sólo puede interpretarse como una medida "a la inversa", como un objeto compuesto de dos partes: el signo – y una medida, mientras que el positivo representa, sin más, una medida. Esto puede llevarnos a interpretar los números enteros negativos como algo radicalmente distinto de los números naturales y no como su prolongación.

Brousseau (1983) argumenta en la misma línea que Duroux, insistiendo en que hay que distinguir entre un "obstáculo" y una "dificultad", sugiriendo que lo que propone Glaeser son "dificultades" que pueden servir como punto de partida para la búsqueda de los verdaderos "obstáculos":

> Muy a menudo, es entre las "dificultades" donde hay que buscar los indicios de los obstáculos, pero para satisfacer la primera condición que dice que un **obstáculo es un conocimiento**, el investigador deberá hacer un esfuerzo para reformular la "dificultad" que estudia en términos, no de una falta de conocimiento, sino de conocimiento (falso, incompleto. . .). (Brousseau, 1983, p. 190)

Pero además es necesario establecer, no sólo los errores, dificultades y resistencias que ese obstáculo produce, sino también el dominio donde se revela eficaz:

> Y hay que hacer notar que no basta con identificar las dificultades y los fracasos del conocimiento-obstáculo, sino también, y sobre todo, sus **éxitos**. (Brousseau, 1983, p. 192)

En el intento de encontrar el obstáculo u obstáculos que puedan estar detrás de esas dificultades, Brousseau (1983, p. 191) hace la hipótesis de que el empleo de números con signo se generalizó al atribuir arbitrariamente el estatuto de "positivo" o "negativo" a las medidas de las cantidades de magnitud, según el papel que representaban en la situación. Por ejemplo, dependiendo de la situación, la entrada y salida de productos en un comercio puede notarse positiva o negativamente. Esos números, considerados aisladamente son números sin signo, puesto que representan medidas de magnitudes; el signo es algo circunstancial, provisional, que sirve para indicar la oposición de unas cantidades respecto a otras en el transcurso de la acción. Así pues, el carácter "relativo" de los números positivos y negativos pudo jugar un papel importante en su creación y aceptación y suponer un obstáculo a una concepción que asuma el signo como algo intrínseco al propio número.

También retoma la propuesta de Duroux, respecto a que la concepción de los números negativos como objetos de naturaleza distinta a los positivos pudo ser un obstáculo a la homogeneización de los dos tipos de números y su inclusión en una única clase: la de los enteros, pero advierte de que, tanto la "relatividad de positivos y negativos" como "la diferente naturaleza de los negativos respecto a los naturales", son sólo candidatos a obstáculo y que su aceptación como tales exige probar la resistencia de esas concepciones a evolucionar y los errores repetidos que produjeron. Brousseau piensa que en el intento de probar el carácter de obstáculo de estas concepciones es muy probable que se haga evidente la existencia de un obstáculo todavía más antiguo: "la concepción del número como medida", es decir, la idea de que un objeto matemático sólo puede recibir la consideración de número si representa o puede representar la medida de una cantidad de magnitud.

Schubring (1986, 1988) realiza un trabajo parecido al de Glaeser, pero analizando, sobre todo, textos escritos por matemáticos alemanes. A la hora de explicar la difícil emergencia del número negativo, recurre también al término 'obstáculo', pero con un sentido distinto al usado por los autores anteriores. Así dice (1986, pp. 22-24) que las principales causas de impugnación de los números negativos como objeto plenamente matemático pertenecen a tres grandes categorías:

- *Obstáculos internos a las matemáticas.* Dentro de esta categoría señala la dificultad para distinguir entre cantidad, magnitud y número. Históricamente, el concepto básico de las matemáticas ha sido el de cantidad, pero, hoy en día, ese término ha dejado de representar una noción matemática precisa, siendo sustituido por el de número. A juicio de Schubring, uno de los hechos que obstaculizó el proceso de conceptualización del número negativo fue la tardía diferenciación entre número, cantidad y magnitud que revela la lectura de textos matemáticos franceses. Según él, se trata de un fenómeno localizado que no puede extenderse a otros países como, por ejemplo, Alemania, donde un desarrollo temprano del concepto de número, separado de los de cantidad y magnitud, evitó parte de las dificultades observadas en el país vecino.

- *Obstáculos epistemológicos.* Considera como tales, los que se refieren a:

> Las epistemologías subyacentes a la trasmisión del saber científico a la sociedad en general. Por "epistemología" se puede entender las concepciones sobre las condiciones de "existencia" de las entidades matemáticas. Estas epistemologías se presentan con la siguiente alternativa:
>
> - una epistemología sustancialista (u ontológica), según la cual los conceptos se justifican por reducción a unos entes a los que se concede una existencia semejante a la del mundo físico;
>
> - una epistemología sistémica, donde la existencia está justificada por la coherencia del campo conceptual y los conceptos no deben satisfacer más que condiciones internas a las matemáticas. (Schubring, 1986, p. 23)

En opinión del autor, la opción por una u otra de estas alternativas puede ser responsable de alguna de las rupturas descritas en el ámbito de los números negativos. Se observa aquí una cierta coincidencia entre Schubring y Glaeser respecto a un posible obstáculo, aun cuando le dan nombres distintos: el primero le adjudica el término genérico de 'obstáculo epistemológico', mientras que el segundo le llama 'estancamiento en el periodo de las operaciones concretas'.

- *Arquitectura de las matemáticas.* Se refiere con esto a una tercera categoría de obstáculos que tienen que ver con la importancia que en cada época se ha concedido a las distintas ramas de las matemáticas, en particular, al álgebra y a la geometría. El hecho de que las dos tengan igual importancia favorece a nociones, como la de cantidad, integradoras de los dos ámbitos, lo que perjudica el proceso de diferenciación entre número y cantidad; si se considera a la geometría como la rama más importante de las matemáticas, la cantidad se convierte en la noción básica de las matemáticas y la de número es una noción subsidiaria; por último, si es el álgebra la disciplina fundamental y la geometría un campo de aplicación del álgebra, se tiene entonces la concepción que sostuvo el proceso llamado de 'aritmetización de las matemáticas' con el número como noción básica. Schubring considera que muchas rupturas conceptuales pueden explicarse en términos de concepciones sobre la arquitectura de las matemáticas.

Es evidente que la concepción de obstáculo que maneja Schubring está muy alejada de la propuesta de Brousseau. Parece que entiende por obstáculos ciertos conocimientos meta-matemáticos que son, según él, las causas últimas de las rupturas observadas en el proceso de evolución del estatuto matemático de ciertas nociones; rupturas que, por otra parte, queda sin definir en qué consisten y cómo se reconocen. Únicamente en la primera categoría de obstáculos que propone, los "obstáculos internos", hace referencia a conocimientos propiamente matemáticos y no de epistemología de las matemáticas, pero enseguida añade que esta categoría no parece haber sido la causa principal de las rupturas e, incluso, parece haber contribuido al lento progreso del estatuto matemático del número negativo, dejando en manos de las otras dos categorias: los "obstáculos epistemológicos" y la "arquitectura de las matemáticas", la responsabilidad de las tales rupturas.

Por otro lado, Brousseau califica de "epistemológicos" a los obstáculos encontrados en la enseñanza de las matemáticas si se constata que en alguna época histórica la comunidad matemática tuvo que franquear ese mismo obstáculo y las huellas de ese hecho pueden encontrarse en el discurso matemático actual. Sin embargo, Schubring utiliza dicho calificativo para referirse, como ya hemos dicho, a ciertas concepciones filosóficas sobre las condiciones de existencia de los objetos matemáticos que, a su juicio, impregnan los procesos de transmisión del saber matemático a la sociedad.

Todo esto nos permite constatar que la discusión sobre los obstáculos epistemológicos en los números negativos tiene una dimensión más profunda: la discrepancia sobre la naturaleza y utilidad de la noción de obstáculo epistemológico en el ámbito de la didáctica de las matemáticas.

4. Resumen del estado de la cuestión

Aun cuando la polémica de la que hemos dado cuenta en los apartados anteriores se produjo hace ya bastantes años, no ha habido desde entonces ninguna contribución importante al tema. De hecho, la situación en el momento actual podría resumirse en los siguientes términos:

1) La noción de obstáculo epistemológico ha seguido recibiendo interpretaciones diversas y, en general, bastante alejadas del sentido inicial definido por Brousseau (Sierpinska, 1989; Artigue, 1990; Chevallard, Bosch y Gascón, 1997), mientras que en otros casos se ha sustituido por nociones consideradas más apropiadas (Léonard y Sackur, 1990). Sin embargo, el obstáculo epistemológico tal como lo concibe Brousseau no ha sido contrastado

experimentalmente -la mayor parte de los investigadores que lo han utilizado lo han hecho dándole un significado distinto del propuesto por él-, ni tampoco se han hecho objeciones que justifiquen su abandono o sustitución por otro concepto.

2) La propuesta de Glaeser sobre posibles obstáculos en la historia de los números negativos a tener en cuenta en la enseñanza actual, al margen de las críticas ya comentadas, no ha vuelto a discutirse. Los trabajos posteriores sobre epistemología del número negativo, o bien no se expresan en términos de obstáculos, o bien hacen una utilización ambigua del término en la que caben sinónimos como 'dificultad', 'ruptura', etc., o bien repiten con pequeñas matizaciones lo ya dicho por Glaeser, Brousseau, Duroux o Schubring, pero sin aportar pruebas que justifiquen su postura. Por consiguiente, en estos momentos no hay acuerdo sobre la existencia o no de obstáculos en la historia de los números negativos, ni sobre cuáles son éstos, supuesto que existan.

3) La determinación de obstáculos en la historia de las matemáticas es interesante desde el punto de vista didáctico si se constata su pervivencia en la enseñanza actual y, en particular, en los alumnos actuales. Un obstáculo epistemológico es, ante todo, una concepción detectable en un número significativo de alumnos que puede ser puesta en relación con ciertas concepciones históricas. Sin embargo, no existen apenas investigaciones que relacionen las concepciones de los alumnos sobre los números negativos con las investigaciones sobre obstáculos en la historia de dichos números. Es más, de hecho apenas existen investigaciones sobre errores de los alumnos que se analicen en términos de concepciones. La mayor parte de los cuestionarios pasados a los alumnos se limitan a aspectos muy puntuales y no permiten relacionar entre sí los errores relativos a diferentes aspectos del número negativo.

Únicamente Coquin-Viennot (1985) e Iriarte et al. (1991) analizan los errores de los alumnos en términos de obstáculos: la primera usando el concepto propuesto por Brousseau y las segundas dándole un sentido parecido al de Glaeser. Pero sus deducciones no han sido confirmadas ni rechazadas por ninguna investigación posterior. Otros investigadores como Peled (1991) o Gallardo (1996) intentan también encontrar una coherencia en los errores de los alumnos que los acerca a la búsqueda de concepciones, pero sin tener en cuenta la posibilidad de los obstáculos.

4) Las conclusiones que se desprenden de los estudios sobre obstáculos epistemológicos en los números negativos hacen sospechar que una introducción de los mismos o, más en particular, de los números enteros, por medio de modelos concretos[4], que es la opción más elegida hoy en día, puede resultar poco conveniente. Para empezar, no sólo es evidente que, aun cuando dichos modelos justifican bastante satisfactoriamente la suma de enteros, no ocurre lo mismo con el producto, sino que hay que afrontar la posibilidad, comentada entre otros, por Glaeser (1981), Coquin-Viennot (1985) y Gobin et al. (1996), de que dichos

[4] Son muchos los modelos concretos que se utilizan o se proponen en la enseñanza de los números enteros (deudas y haberes, temperaturas, fichas de dos colores, móviles que recorren un camino, etc.). Básicamente, pueden clasificarse en dos tipos: modelos de neutralización en los que dos números enteros opuestos representan fuerzas que se neutralizan y modelos de desplazamiento en los que los números enteros representan desplazamientos a lo largo de un camino, en uno u otro sentido.

modelos sean incluso un obstáculo para la comprensión de la estructura multiplicativa de los números enteros.

Por otro lado, la hipótesis de que varios de los obstáculos definidos por Glaeser son manifestaciones de un obstáculo más general: el de la concepción del "número como medida", hipótesis formulada por Duroux (1982) y Brousseau (1983) y asumida, posteriormente, por otros varios autores (Coquin-Viennot, 1985; Schubring, 1986; Iriarte et al., 1991, entre otros), plantea también dudas sobre si la utilización de modelos concretos está en consonancia con el tratamiento didáctico que debe recibir un obstáculo. Sin embargo, la posibilidad de que los modelos concretos resulten ser un obstáculo didáctico o contribuyan a reforzar un obstáculo epistemológico tampoco ha sido estudiada en profundidad y, desde luego, la bibliografía que se dedica a buscar y proponer esos modelos concretos, se olvida o desconoce dicha posibilidad.

Una vez hecho el resumen del estado de la cuestión, podemos pasar, sin más dilación, a exponer los objetivos de nuestro trabajo. Son los siguientes:

- Investigar los obstáculos en la historia de los números negativos utilizando para ello el concepto de obstáculo epistemológico que propone Brousseau.
- Constatar si dichos obstáculos históricos perviven en los alumnos actuales.
- Analizar en qué medida afectaría la existencia de obstáculos epistemológicos a las prácticas habituales de enseñanza del número negativo y a las nuevas propuestas didácticas.
- Verificar si el uso del concepto de obstáculo epistemológico que propone Brousseau nos lleva a obtener resultados que por otras vías no se han conseguido, lo que, de paso, nos permitiría decidir si dicho concepto resulta útil en la investigación didáctica.
- Profundizar en las condiciones históricas que hicieron necesaria la aparición y posterior evolución de los números negativos, información que consideramos relevante de cara al diseño de posibles génesis escolares de la noción.

5. Algunas aportaciones al tema

Entre las aportaciones que, hasta el momento, creemos haber hecho al tema de los obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos, podemos citar las siguientes:

1) Sobre la metodología precisa para determinar obstáculos en la historia de las matemáticas

El concepto de obstáculo epistemológico propuesto por Brousseau requiere ciertas adaptaciones para poder ser utilizado en la historia de las matemáticas. De entrada, un obstáculo es una concepción, es decir, un conjunto de conocimientos y saberes que lleva a un individuo a dar respuestas válidas en un cierto campo de problemas, pero falsas o poco adecuadas en otro. Esta formulación permite distinguir concepciones en los alumnos por medio de cuestionarios que ponen de manifiesto los errores que cometen y las dependencias que se establecen entre ellos. Sin embargo, las concepciones de los matemáticos del pasado sólo pueden determinarse estudiando sus obras, y en ellas, como consecuencia del fenómeno de la transposición didáctica, apenas quedan huellas de los errores, vacilaciones, dificultades o fracasos propios del proceso de creación matemática.

Así pues, la detección de errores no puede constituirse en el eje alrededor del cual se establezcan las concepciones históricas, sino que habrá que buscar los indicios que nos permitan deducir las dificultades o fracasos que no suelen evidenciarse en los textos históricos. Uno de estos indicios es el campo de problemas que aborda la obra matemática considerada y las técnicas que utiliza para resolverlos. Los límites de ese campo y las características de las técnicas empleadas pueden indicar zonas de dificultad, zonas donde la concepción no es eficaz, lo que nos ayudará a definirla.

Ahora bien, un obstáculo es además una concepción que se resiste a evolucionar o a ser sustituida por otra, incluso cuando se hace patente su fracaso. Establecer el carácter de obstáculo de una concepción histórica exige algo más que comprobar su eficacia o ineficacia en un cierto campo de problemas, exige comprobar que, a pesar de las repetidas dificultades que producía, la comunidad matemática se resistió por largo tiempo a abandonarla. Y en este punto hay que tener en cuenta varios aspectos:

- El hecho de que un determinado campo de problemas no se aborde puede deberse, bien a que los matemáticos de la época considerada lo han intentado, pero su concepción no les permite afrontar con éxito su resolución, o bien a que ese campo de problemas no forma parte de la preocupaciones matemáticas de dicha época. Hay que distinguir estos dos casos porque en el primero nos podríamos encontrar ante una concepción obstáculo, mientras que en el segundo caso es más dudoso.

- La distinción entre conocimiento y saber. Cuando se estudian las obras matemáticas nos encontramos con que determinados conocimientos están en la base de algunas de las técnicas usadas para resolver los problemas, pero no se explicitan, no se tratan como un saber. La existencia de conocimientos que "se usan" pero de los que "no se habla", puede indicar que la concepción tiene dificultades para integrar conocimientos necesarios para resolver nuevos campos de problemas, lo que es un sintoma de obstáculo.

- Otra idea importante para caracterizar obstáculos en la historia de las matemáticas la aporta Gascón (1993) cuando propone que un obstáculo epistemológico debe buscarse en los orígenes de una bifurcación, entendiendo por tal un cambio en la naturaleza del trabajo matemático, tanto en lo referente a sus técnicas como al campo de problemas que aborda. De esta manera liga y, por consiguiente, limita la existencia de obstáculos epistemológicos a los momentos de ruptura producidos en la evolución histórica de las matemáticas.

Por consiguiente, a la hora de caracterizar las concepciones históricas hemos tenido en cuenta las siguientes variables: campo de problemas, objetos de referencia, conocimientos, saberes, límites de la concepción y relación de la misma con las matemáticas de su época y de épocas anteriores y posteriores.

2) Sobre los obstáculos en la historia de los números negativos

En primer lugar, hay que decir que, hasta ahora, las aportaciones epistemológicas al tema se han hecho desde el punto de vista de estudiar la "historia de los números negativos". Solamente Brousseau (1983) y Lizcano (1993) hablan de algo que nos parece fundamental:

no se puede interpretar la historia de las nociones matemáticas en términos de una sucesión de estados intermedios, defectuosos o incompletos, respecto a un ideal que se alcanza en nuestra época. La conflictiva emergencia de los números negativos pone de manifiesto la existencia histórica de diferentes formas de negatividad matemática que, ni fueron, en su momento, entendidas como números, ni pueden interpretarse como un proceso continuo que desemboca, inevitablemente, en el número negativo actual. Esto nos lleva a utilizar, siguiendo a Lizcano, los términos 'negatividad' o 'formas de negatividad' para indicar lo que habitualmente se consideran antecedentes históricos del número negativo.

Por tanto, nosotros no hablamos de concepciones históricas de los 'números negativos' sino de concepciones históricas de la 'negatividad matemática', sin establecer a priori una identificación entre las formas de negatividad que esas concepciones revelan y los números negativos actuales. Esta precaución nos ha permitido darnos cuenta de que esos "antecedentes" no lo son sólo del número negativo, sino también de otras varias nociones de las matemáticas actuales: traslaciones, vectores, recta real, segmentos orientados, etc.

El estudio de diferentes concepciones históricas sobre la negatividad[5] pone de manifiesto, a nuestro juicio, la existencia de dos concepciones obstáculo: la primera, aparecida en la matemática griega clásica, se organiza alrededor de la diferencia entre cantidades entendida como operación de "sustraer de lo que previamente existe"; la segunda se establece definitivamente en el siglo XVII, cuando se asume una interpretación de la diferencia entre cantidades en términos de variación o diferencia orientada o relativa.

Los objetos de referencia de la primera concepción obstáculo son, por una parte, los números naturales y las razones de números naturales, entendidos ambos como medidas absolutas de cantidades de magnitud, es decir, medidas en las que el cero representa la ausencia de cantidad de magnitud y, por otra, la diferencia de números naturales o de sus razones con minuendo mayor o igual que el sustraendo, entendida como "sustracción". El campo de problemas que aborda es el de los problemas aritméticos en $\mathbb{Q}^+$ o $\mathbb{R}^+$, resueltos con técnicas algebraicas en las que intervienen operaciones con diferencias o con sumandos y sustraendos. No se asume la existencia de una diferencia con minuendo menor que el sustraendo, ni la existencia de un sustraendo aislado y el álgebra está subordinada a la aritmética y es simplemente una herramienta de resolución de los problemas aritméticos.

En la segunda concepción obstáculo los objetos de referencia son, por un lado, los números con signo entendidos como medidas relativas de cantidades de magnitud -medidas referidas a una cierta cantidad de magnitud tomada como origen a la que se adjudica la medida cero-, o entendidos como medidas orientadas -medidas a las que se añade un signo que refleja una cierta cualidad bivalente de la magnitud-; por otro lado, las diferencias de números positivos con minuendo mayor, menor o igual que el sustraendo, entendidas como variaciones o "diferencias" orientadas. Esta concepción permite "dar sentido" y, en consecuencia, aceptar las soluciones negativas de las ecuaciones, lo que autoriza el desarrollo de la teoría de las ecuaciones algebraicas, pero no justifica la estructura ordinal ni multiplicativa de $\mathbb{R}$.

[5] Concretamente se estudian las que aparecen en la *Arithmetica* de Diofanto (siglo III d.C.), los *Nueve Capítulos del Arte Matemático* de Liu Hui (siglo III d.C.), el *Triparty en la science des nombres* de Chuquet (1484), el *Treatise of Algebra* de McLaurin (1748) y *A treatise on Algebra* de Peacock (1830).

3) Sobre la necesidad de tener en cuenta los obstáculos históricos en la enseñanza de los números negativos

Los modelos concretos que se utilizan para introducir el número entero funcionan como metáforas o analogías: se supone que el modelo "se parece" al número entero y, como consecuencia, las reglas de funcionamiento del modelo, supuestamente familiares al alumno, pueden extenderse al sistema de los números enteros[6]. Ahora bien, los objetos que componen esos modelos concretos, o bien son magnitudes orientadas o relativas que se neutralizan, o bien son desplazamientos o posiciones en uno u otro sentido de recorrido. Por consiguiente, las propuestas de enseñanza de los números negativos basadas en modelos concretos, aun cuando pueden ser adecuadas para franquear el primer obstáculo epistemológico, refuerzan a cambio el segundo obstáculo epistemológico, precisamente, aquel que fue necesario superar para construir el concepto actual de número negativo.

Pero además, históricamente la negatividad surge en el contexto del álgebra y son las necesidades del cálculo algebraico las que determinan las reglas de manejo de los números con signo. De manera que en las distintas concepciones históricas sobre la negatividad no son los aspectos semánticos los que determinan la sintaxis de dichos números con signo, sino las exigencias de las técnicas de cálculo algebraico. Sin embargo, en la enseñanza actual los números enteros se introducen en un contexto aritmético, tanto en las situaciones que presenta como en las técnicas que utiliza para resolverlas, contexto en el que no son necesarios como estrategia de resolución. En consecuencia, el establecimiento de sus reglas de cálculo queda totalmente a merced del modelo concreto que se utilice para introducirlos, y este tratamiento didáctico contribuye todavía más a agravar el obstáculo epistemológico.

Bibliografía

ARTIGUE, M. (1990), 'Epistémologie et didactique', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2/3), 241-286.

BACHELARD, G. (1938), *La formation de l'esprit scientifique*, Librairie Philosophique J. Vrin, París, 1986.

BROUSSEAU, G. (1980), 'Problèmes de l'enseignement des décimaux', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 1(1), 11-59.

BROUSSEAU, G. (1981), 'Problèmes de didactique des décimaux', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2(3), 37-127.

BROUSSEAU, G. (1983), 'Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), 165-198.

BROUSSEAU, G. (1988), 'Les obstacles épistémologiques dans la conception des decimaux', *manuscrito.*

[6] Esta forma de entender la relación entre un sistema y su modelo en términos de "parecido", es decir, el modelo "representa" o es "una imagen" del sistema que modeliza, ha sido descrita por Chevallard (1992) quien la designa con el término de 'ilusión representacionalista'.

BROUSSEAU, G. (1989a), 'Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques'. En N. Bednarz y C. Garnier (eds.), *Construction des savoirs. Obstacles et conflits*, Les Editions Agence d'ARC, Quebec, 41-63.

BROUSSEAU, G. (1989b), 'Obstacles épistémologiques, conflits socio-cognitifs et ingénierie didactique'. En N. Bednarz y C. Garnier (eds.), *Construction des savoirs. Obstacles et conflits*, Les Editions Agence d'ARC, Quebec, 277-285.

CHEVALLARD, Y. (1992), 'Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 73-112.

CHEVALLARD, Y., BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1997), *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*, ICE-Horsori, Barcelona.

COQUIN-VIENNOT, D. (1985), 'Complexité mathématique et ordre d'acquisition: une hierarchie de conceptions a propos des relatifs', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 6(2/3), 133-192.

DUROUX, A. (1982), *La valeur absolue: difficultés majeures pour une notion mineure*, memoria de DEA, Publications de l'IREM, Burdeos.

GALLARDO, A. (1996), 'Qualitative analysis in the study of negative numbers', *Proceedings of the 20th International Conference of PME*, Valencia, vol. 2, 377-384.

GASCON, J. (1993), 'Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: del patrón de análisis-síntesis a la génesis del lenguaje algebraico', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 13(3), pp. 295-332.

GLAESER, G. (1981), 'Epistémologie des nombres relatifs', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2(3), 303-346.

GOBIN, C. et al. (Groupe 1er cycle) (1996), *Les nombres relatifs au collège*, IREM de Poitiers.

IRIARTE, M.D., JIMENO, M. y VARGAS-MACHUCA, I. (1991), 'Obstáculos en el aprendizaje de los números enteros', *Suma*, 7, 13-18.

LÉONARD, F. y SACKUR, C. (1990), 'Connaissances locales et triple approche, une méthodologie de recherche', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2/3), 205-240.

LIZCANO, E. (1993), *Imaginario colectivo y creación matemática*, Editorial Gedisa, Barcelona.

PELED, I. (1991), 'Levels of knowledge about signed numbers: effects of age and ability', *Proceedings of the 15th International Conference of PME*, Assisi (Italia), 145-152.

SCHUBRING, G. (1986), 'Ruptures dans le statut mathématique des nombres négatifs', *Petit x*, 12, 5-32.

SCHUBRING, G. (1988), 'Discussions épistémologiques sur le statut des nombres négatifs et leur représentation dans les manuels allemands et français de mathématiques entre 1795 et 1845'. En C. Laborde (ed.), *Actes du premier Colloque Franco-allemand de*

Didactique des Mathématiques et de l'Informatique, La Pensée Sauvage Editions, Grenoble, 137-145.

SIERPINSKA, A. (1989), 'Sur un programme de recherche lié à la notion d'obstacle épistémologique'. En N. Bednarz y C. Garnier (eds.), *Construction des savoirs. Obstacles et conflits*, Les Editions Agence d'ARC, Quebec, 130-147.

Chamorro, Ma. del C., "Los procesos de aprendizaje en matemáticas y sus consecuencias metodológicas en primaria", en UNO. *Revista de Didáctica de las Matemáticas*, núm. 4, abril, 1995, pp. 87-96.

Los procesos de aprendizaje en Matemáticas y sus consecuencias metodológicas en Primaria*

Mª. Del Carmen Chamorro

El desconocimiento por parte de algunos profesores de los procesos de aprendizaje de las matemáticas, está en el origen de muchos de los fracasos de los alumnos de Primaria en esta área. Sólo así es explicable la utilización de métodos basados fundamentalmente en la memorización y el ejercicio repetitivo, que en nada favorecen la comprensión conceptual y consecuentemente la transferencia, algo de lo que están muy necesitados nuestros escolares.

La toma en consideración de algunos elementos teóricos, tales como la idea de campo conceptual, obstáculo epistemológico o conflicto socio-cognitivo, puede proporcionar indicaciones metodológicas de gran valor en la práctica que conduzcan a la consecución de un aprendizaje más significativo en matemáticas.

Learning processes in mathematics and their methodological implications for primary school teaching

Ignorance of mathematics learning processes by some teachers in at the root of many failures by primary school pupils in this area. This ignorance is the only explanation for the use of methods based mainly on memorization and repetitious exercises that do nothing to foster conceptual understanding and thus transference, although this is something schoolchildren today badly need.

Taking certain the oretical elements into consideration, such as the notions of conceptual field, epistemological obstacle and socio-cognitive conflict, may provide methodological ponters which are of great value in practice and lead to more significant learning in mathematics.

Introducción

El contacto con el profesorado en ejercicios nos ha convencido de que las evidencias son a veces más difíciles de asimilar de lo que cabría esperar. Y una evidencia para quien enseña matemáticas en Primaria es que cualquier esfuerzo encaminado a la mejora de su enseñanza, pasa por mejorar nuestra comprensión, la comprensión de los profesores y profesores de matemáticas, de los procesos de aprendizaje de los alumnos.

Una de las causas, y evidentemente no la única, que explica los malos resultados de los estudiantes en matemáticas, es la utilización en el aula de materiales y métodos que ignoran como se aprende, o que están en clara confrontación con la construcción de los conceptos matemáticos.

Si bien aún queda mucho para disponer de una teoría coherente que explique completamente todos los fenómenos que se dan en el aprendizaje de las matemáticas, y ponga de manifiesto el papel del conocimiento matemático, del alumno y del profesor, se dispone ya de aportaciones teóricas muy importantes debidas entre otros a Gerar Vergnaud, Guy Brousseau, y desde luego Jean Piaget, que sentó las bases de la psicología genética, proporcionando con su teoría de la equilibración mayorante una explicación sobre la evolución de los conocimientos.

Algunos de estos elementos teóricos pueden ser de gran utilidad para mirar el currículo de Primaria con una visión más penetrante, que nos lleve, casi de la mano, a la elección de los métodos de trabajo más idóneos y presumiblemente más eficaces que mejoren la comprensión y el rendimiento de los alumnos y alumnas.

Pasaremos revista a las nociones de *esquema y campo conceptual* debidas a Vergnaud, de *obstáculo epistemológico* de Brousseau, *y de* conflicto *socio-cognitivo,* concepto procedente del campo de la psicología social genética, trabajado en el campo de las matemáticas por Perret-Clermont.

LA TEORÍA DE LOS CAMPOS CONCEPTUALES DE G. VERGNAUD

La teoría de campos conceptuales de marcado carácter cognitivista supone una mejora de las teorías anteriores de Piaget, y su autor la define como una teoría psicológica de la conceptualización de lo real, que pretende explicar las filiaciones y rupturas que se producen entre los conocimientos, especialmente los científicos y tecnológicos. El deseo de tomar en consideración las dos ideas que siguen, se encuentra detrás de la idea de campo conceptual: la interconexión de unos conceptos/procedimientos con otros de los que difícilmente se pueden disociar, y la necesidad de estudiar el desarrollo del estudiante no sólo en un periodo largo de tiempo sino en relación con un amplio campo de conocimientos.

Así, Vergnaud define el campo conceptual como "un espacio de problemas o de situaciones-problema cuyo tratamiento implica conceptos y procedimientos de varios tipos pero en estrecha conexión".

Un concepto hace referencia siempre a un conjunto de situaciones (S) que dan sentido al concepto (C), y así, un campo conceptual puede considerarse como un conjunto de situaciones, entendiendo éstas como combinación de tareas. Se trata por tanto de considerar la acción del sujeto en relación con una situación, observando la organización de su conducta, es decir, si utiliza anticipaciones y reglas de acción, conceptos y teoremas en acto, que son los elementos que permiten analizar la situación en cuestión. Piaget denominó a dichos elementos variantes operatorios (I), y constituyen los conocimientos contenidos en los esquemas. Uno de los hechos establecidos por la psicología cognitiva es que el desarrollo de la inteligencia se realiza en grandes etapas que se caracterizan por la consecución de nuevos *invariantes operatorios* y que vienen a constituir una especia de jalones en el desarrollo del individuo.

Un esquema es un sistema de asociaciones, acciones, ideas, conocimientos y hábitos que pueden ser usados en todo momento, algo parecido a una red de relaciones. A lo largo del aprendizaje de las matemáticas los esquemas se modifican y se enriquecen; así, una mejora puede consistir en la eliminación de ideas erróneas o no pertinentes, o en la elaboración de procedimientos o estrategias más eficaces para resolver una situación. En este sentido, *comprender es integrar en los esquemas precedentes* a través de los mecanismos de acomodación-asimilación.

Así por ejemplo, los distintos mecanismos de conteo de una colección, o las estrategias de resolución de ecuaciones sencillas del tipo a + b -? utilizadas por niños y niñas, han sido perfectamente estudiados, así como el paso de un esquema a otro superior, lo que ha permitido detectar que los profesores no enseñan, en contra de lo que pudiera pensarse, la rutina más eficiente propia de un ejecutor hábil, de forma que corresponde a los niños hacer por sí solos la transición de un modelo a otro más eficaz, más automatizado o algoritmizado cuando aprenden.

Por tanto, en un campo conceptual C hay siempre un conjunto de esquemas que son utilizados por los sujetos para resolver las situaciones S.

Así mismo, el tratamiento de esas situaciones, la aplicación de los esquemas, lleva implícita la utilización y organización de un lenguaje (S) en la vertiente de comunicación o de representación, y una actividad de representación simbólica. El lenguaje natural de los niños constituye al principio una herramienta o útil del pensamiento, en tanto que las verbalizaciones acompañan siempre al razonamiento, y la transformación de este útil en objeto de pensamiento, en el sentido dado por Regine Douady, forman parte de la conceptualización matemática. Lenguaje y símbolos matemáticos carecen de sentido considerados fuera de los esquemas y las situaciones.

En resumen, un campo conceptual es el triple formado por

C - (S, I, S)

Son campos conceptuales entre otros:

– las estructuras aditivas, que incluyen los conceptos de: cardinal, medida, transformaciones por aumento y disminución, composición de medidas, composición de transformaciones, de número natural y número negativo_

– las estructuras multiplicativas, que engloban los conceptos de: proporción simple y compuesta, función lineal y multilineal, razones, cociente y producto de dimensiones, fracción, número racional, múltiplo, divisor_

– las magnitudes espaciales: longitud, superficie, volumen

– la lógica de clases, que constituye la referencia para entender los conceptos de propiedad, relación de inclusión, operaciones de unión e intersección, complementario de clases, conjunción, disyunción y negación de propiedades.

De los estudios de Vergnaud puede desprenderse fácilmente la necesidad de practicar una enseñanza cargada de significados que vengan dados por las situaciones variadas en las que un concepto se forma y adquiere sentido, de manera que se pongan en todo momento de manifiesto las interrelaciones entre un concepto y aquellos que forman parte de un mismo campo conceptual. Tal propuesta es sólo posible si las situaciones presentadas en el aula responden a los criterios de variedad, interés y verosimilitud y guardan relación con las capacidades y actividad intelectual de los niños y las niñas a los que van dirigidas, actividad sobre lo real que es fuente de construcción de los conocimientos.

CÓMO INTERPRETAR Y UTILIZAR EL ERROR EN MATEMÁTICAS

El papel del error y su relación con las concepciones de los alumnos y alumnas constituye una segunda pauta para la reflexión.

Para muchos autores, Brousseau entre ellos, el aprendizaje se produce por adaptación al medio, a una situación concreta, y los conocimientos se adquieren por progresos relativamente discontinuos que suponen rupturas cognitivas, cambios de modelos implícitos y de concepciones.

En particular, la construcción de la escencia pone en evidencia la ruptura entre los modelos espontáneos de los sujetos y el conocimiento científico, de forma que la historia de la ciencia se halla jalonada por "Errores rectificados". Así, la epistemología científica aparece como una rectificación constante en la que se da la prima-teorica del error en terminología de helard, para quien el error, lejos de ser una laguna o una falta de conocimiento tiene toda la vitalidad del instinto. Según sus palabras: "Se conoce de hecho contra un conocimiento anterior, destruyendo conocimientos mal hechos, superando lo que en el espíritu mismo constituye obstáculos".

La construcción del conocimiento en una perspectiva construccionista, funciona de forma similar. Un conocimiento no se adquiere sustituyendo una concepción antigua del sujeto por otra nueva, sino en interacción con aquella, según la dialéctica antigua/nueva.

Una concepción es el producto de estructuraciones, acomodaciones y maduraciones de un sujeto, y por tanto es evidente que una concepción puede ser falsa o incompleta como resultado de un problema de centración-descentración, pues a menudo, el sujeto se centra en un único aspecto de una situación compleja, sin conseguir descentrarse de este aspecto parcial, lo que le impide lograr una visión global. Otra propiedad de las concepciones es que son dinámicas, pudiendo hablarse de una filiación de concepciones, entendiendo por tal el conjunto de lazos que existen entre una serie de representaciones intermedias.

A veces, el cambio de concepciones da lugar a un conflicto cognitivo; la eliminación de conocimientos falsos se muestra resistente, incluso después de que el alumno ha comprobado su falsedad y aparentemente los ha rechazado. En este caso se habla de obstáculo epistemológico.

Los obstáculos se repiten y aparecen en la filogénesis y en la ontogénesis.

Un obstáculo es pues un conocimiento, no una falta de conocimiento o una dificultad sin más, que se muestra eficaz en situaciones determinadas, pero que fracasa fuera de ese contexto. Resiste a las contradicciones a las que se confronta, y reaparece de tiempo en tiempo en circunstancias propicias, a pesar del rechazo explícito del sujeto.

Brousseau distingue varios tipos de obstáculos: ontogenéticos, epistemológicos, didácticos y culturales.

Se reconoce así que la cultura, las concepciones culturales, pueden constituir un obstáculo. La cultura ayuda a comprender los procesos, pero no hay que olvidar que a veces se aprende contra la cultura, contra la práctica cotidiana, lo que debería hacer sospechar a los profesores de las virtudes de la práctica indiscriminada, heredada de la pedagogía de la acción, y reflejo de la ilusión empirista de los años 70.

Así por ejemplo, el fenómeno de aritmetización de la medida que se da en nuestra sociedad constituye un obstáculo para la comprensión de lo que significa medir, de forma que las prácticas de medida en la realidad y con los instrumentos habituales pueden generar numerosos obstáculos que harán de freno a la conceptualización.

Los obstáculos ontogenéticos se producen cuando el aprendizaje requiere del sujeto una capacidad por encima de su madurez conceptual. Este tipo de obstáculos ha abundado en la enseñanza de las matemáticas en España, siendo propiciados en muchas ocasiones por los propios Cuestionarios Oficiales, que requerían de los niños la utilización de un lenguaje y un simbolismo que sobrepasaba su madurez, con lo que la única salida posible para alumnos y profesores era la memorización y la algoritmización a través de la repetición, de procedimientos no comprendidos, con el consiguiente riesgo de pérdida de sentido de la actividad matemática y la comisión de numeroso errores.

A nuestro juicio y por primera vez, el DCB, se ha situado en una perspectiva más realista que toma en consideración las verdaderas capacidades de niños y niñas, y lo que quizás a muchos pueda parecer insuficiente, no es un ajuste a la baja sino a la realidad.

La relación didáctica es fruto también de obstáculos, en la medida que la distancia entre el saber del alumnado y el saber del profesorado condicionan la aparición de obstáculos didácticos, debidos por ejemplo a métodos inapropiados, uso abusivo de analogías, aproximaciones parciales, etcétera, en la transposición didáctica, lo que necesariamente provoca conocimientos erróneos e incompletos.

De todo lo anterior se deduce naturalmente, que los errores no son sólo falta de conocimientos, erráticos y sancionables, según la consideración más peyorativa que de ellos hacen muchos profesores y profesoras, sino que son el resultado de concepciones falsas o incompletas, pudiendo ser considerados por el alumno cono indicio de contradicción que le obligue a rechazar una concepción.

Los errores se agrupan en torno a concepciones, y de alguna forma un obstáculo epistemológico va a determinar una serie de errores que le son propios. Se hace por tanto necesaria una interpretación de los errores por parte del profesorado, a efectos de determinar la tipología y reagrupación de los mismos en relación con la constitución del conocimiento. M. H. Salin propone:

– una descripción de los errores, la búsqueda de los rasgos que caracterizan las situaciones en que aparecen y su agrupamiento en regulaciones cognitivo-afectivas.

– la búsqueda de tipos de errores en relación con los obstáculos epistemológicos o los conocimientos y su observación.

Estamos de acuerdo con M. Henry cuando afirma que los profesores necesitan una gran cultura histórica, epistemológica y didáctica para interpretar los errores de los estudiantes, y que entre las elecciones que tiene el profesor frente a los obstáculos, la peor es ignorarlos. Las dificultades se saltan pero los obstáculos no.

Desde un punto de vista didáctico interesa que el profesor reflexione en cada caso sobre cómo favorecer el cambio de concepciones de los alumnos, y qué familia de situaciones didácticas presentar en clase para que la interacción del alumno con las mismas desemboque en la construcción del conocimiento matemático deseado.

EL PAPEL DE LA PRÁCTICA Y DE LA MEMORIA

Si sabemos que el conocimiento matemático de los alumnos y alumnas no se produce según el esquema de sucesión de concepciones diferentes, ya que muchas de ellas coexisten a la vez en el individuo y se constituyen en mutuo obstáculo, es muy cuestionable la práctica docente habitual basada en un modelo simplemente aditivo que pone el énfasis en la práctica.

Incluso admitiendo que la práctica puede ser interesante para memorizar repertorios de cálculo o automatizar algoritmos, ésta sólo tiene sentido después de una familiarización con los procesos de cálculo, asegurada previamente la comprensión, de forma que los niños tengan siempre como alternativa al olvido la reconstrucción o fabricación de procedimientos propios aunque éstos sean más rudimentarios y artesanales que los algoritmos aprendidos. Se sabe también que una forma de aumentar la capacidad de memoria a largo plazo de una persona, es organizar los elementos menores de información formando bloques.

Las últimas investigaciones sobre la memoria señalan que: "la memoria no puede comprenderse separada de otros procesos cognitivos. La investigación evolutiva ha insistido continuamente en este planteamiento. La memoria y el significado dependen del conocimiento previo del sujeto, por lo que debe existir una profunda relación entre lo que un niño puede hacer o razonar en una etapa determinada y lo que puede recordar o reconstruir.

El DCB propone a este respecto "desarrollar en el alumnado estrategias personales para efectuar cálculos mentales mediante composición y descomposición de números".

La práctica repetitiva se escuda muchas veces, sobre todo en Primaria, en la necesidad de calcular con seguridad y precisión que tendrán los niños en la vida corriente, y con tal excusa algunos maestros ponen a los niños multiplicaciones o divisiones de seis cifras por seis cifras; quienes defienden esta práctica, olvidan decir que en la vida corriente nadie tiene necesidad de tal cosa, y que en caso de ser necesario nadie lo hace con lápiz y papel, que utiliza la calculadora, y que por tanto sería más provechoso invertir el tiempo dedicado a prácticas estériles en hacer posible la resolución de "problemas reales" con la ayuda por ejemplo de la calculadora. A este propósito dice Fielker: "Uno de los propósitos de estos materiales de ayuda es el de ser herramientas, y la calculadora obviamente lo es. Hace aritmética. Y la hace de un modo más eficaz que cualquiera de los que conocemos".

El DCB ha sabido recoger la observación de Fielker, pues sólo así podía compatibilizarse el deseo, manifiestamente expresado, de presentar a los alumnos y alumnas en la medida de lo posible situaciones y problemas relacionados con el entorno, y las dificultades de cálculo que éstos comportan. La realidad es siempre más complicada que los modelos matemáticos que tratan de explicarla.

LA INTERACCIÓN COMO MOTOR DE CAMBIO Y CONSTRUCCIÓN

Nos referimos por último a la noción de conflicto socio-cognitivo, concepto surgido de la psicología social, heredero de las teorías de Vygotski y aplicado a la didáctica en una perspectiva constructivista que creemos prometedora.

El conflicto socio-cognitivo aparece, y de ahí su nombre, en las interacciones sociales entre individuos en las que se manifiesta un sistema de centraciones cognitivas opuestas bien sobre lo real, que los individuos tienen que coordinar para resolverlo. El papel del conflicto socio-cognitivo en la construcción cognitiva individual ha sido puesto de manifiesto en numerosas investigaciones, en tanto que se trata de un conflicto estructurante fuente de cambios en el individuo.

La naturaleza social de las situaciones escolares a las que se confronta a los niños es considerada por la didáctica de las matemáticas en tanto que contrato didáctico que liga al profesor, los alumnos y el saber dentro de una situación didáctica, como instrumento teórico que sirve para comprender cómo se establece el equilibrio en el sistema didáctico formado por los tres polos: saber-profesor-alumno.

En matemáticas, según señala Colette Laborde, existen fundamentalmente dos modalidades de funcionamiento de procesos interpersonales:

"Según que el problema propuesto tenga en sí mismo una dimensión social (caso de todos los juegos de mensajes de geometría para describir y reproducir una figura conforme al mensaje recibido, introducción de códigos o simbolismo matemático tales como unidades de medida o escrituras económicas, y en general todas aquellas situaciones que en terminología de Brousseau son situaciones de formulación).

O bien, se trate de resolver el problema por un grupo de alumnos y alumnas, al margen de que el problema suponga en sí la resolución de un problema social. Esta manera de trabajar supone poder confrontar las estrategias propias con las de los otros, favoreciéndose así la descentración necesaria para negociar en el proceso que lleva a validar o rechazar una estrategia.

En los dos casos, los procesos sociales son respectivamente internos o externos al problema.

Desde un punto de vista metodológico es de gran interés provocar conflictos socio-cognitivos en las situaciones didácticas. La contradicción entre dos puntos de vista opuestos se percibe con mayor nitidez y es refutada con mayor facilidad que la que proviene únicamente de los hechos a los que se ve confrontado un individuo aisladamente, que podría eventualmente ignorar tal contradicción o pasar de un punto de vista al otro de forma oscilante como manera de resolver el conflicto, en ausencia de un partenaira con quien confrontarse. Los trabajos de psicología social ponen en evidencia la supremacía de la coordinación de acciones entre los individuos sobre la coordinación individual en los procesos de elaboración del conocimiento, y son una síntesis del constructivismo piagetiano y las tesis vygotskianas sobre el desarrollo proximal.

Sin embargo, determinadas precauciones relativas a la elección de los partenaires deben ser tomadas para que la interacción funcione adecuadamente; en este sentido un conocimiento previo de los niveles cognitivos de unos y otros es un punto de referencia para organizar las parejas o grupos que habrán de trabajar juntos, de lo contrario, la interacción, si es que se produce (podría ocurrir que la distancia cognitiva hiciera imposible para un individuo comprender las proposiciones contradictorias o simplemente la amalgama resultante de unir las propuestas de A y B aunque sean contradictorias.

La interacción no es siempre un remedio milagroso aplicable a toda situación, determinadas tareas que demandan conocimientos que los alumnos están muy lejos de tener, o que están muy automatizadas, no se resuelven mejor por el hecho de que se provoque una interacción social. En palabras de Brousseau.

"El conflicto socio-cognitivo es una técnica didáctica difícil de poner en marcha y de gestionar:

– el objeto de debate puede cambiar de cuadro de un momento a otro, sin que sea posible estimar la utilidad de este deslizamiento.

– las intervenciones del profesor se ven constreñidas entre limitaciones contradictorias.

– es una técnica muy costosa en tiempo.

(-) El término conflicto socio-cognitivo pone el acento de manera excesiva en dos momentos del debate: el examen y la toma en consideración de posiciones contradictorias, y enmascara una condición indispensable para su buen funcionamiento: la cooperación de los alumnos de cara a la construcción de un saber común verdadero.

CONCLUSIÓN

Creemos haber esbozado algunas peculiaridades de los procesos de aprendizaje en matemáticas, tales como la construcción a través de la acción, la consideración del error como síntoma de concepciones erróneas o incompletas, el origen de los obstáculos y la manera de afrontarlos, la organización en campos conceptuales de los conceptos y el papel de los conflictos socio-cognitivos en el aprendizaje. En consecuencia, sólo cabe abordar una metodología acorde con lo anterior, que se pregunte cada día si responde a los principios teóricos anteriores.

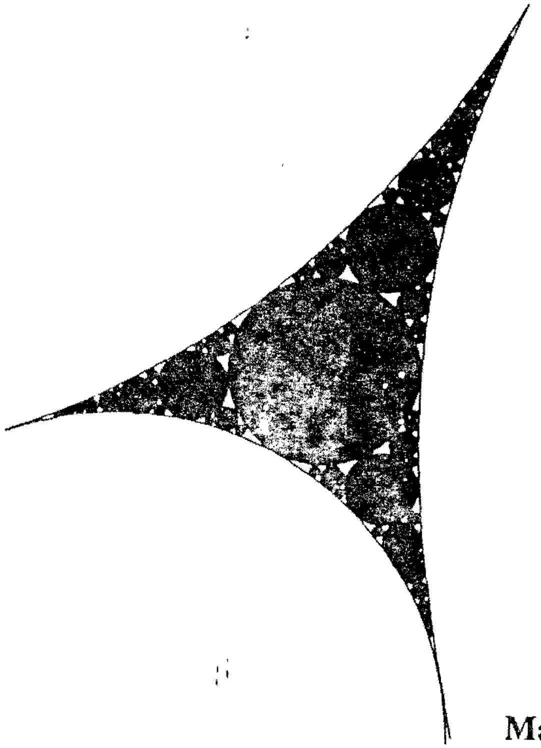
Estamos seguros de que si la respuesta es afirmativa, estaremos en condiciones de mostrar a los alumnos y alumnas de Primaria que aprender matemáticas puede ser una aventura no sólo posible sino además apasionante.

*Ponencia presentada en las VII JAEM celebradas en Badajoz en 1993.

Filloy, E. (1999), "Procesos de abstracción en el aprendizaje del álgebra", en *Aspectos teóricos del álgebra educativa*, México, Grupo Editorial Iberoamérica (Sociedad Mexicana de Matemática Educativa), pp. 80-109

1

ASPECTOS TEÓRICOS DEL ÁLGEBRA EDUCATIVA



Colección
Sociedad Mexicana
de
Matemática Educativa

Eugenio Filloy Yagüe

Serie
Investigación en
Matemática Educativa

S.A. de C.V.
Grupo Editorial Iberoamérica

Capítulo Ocho

Procesos de abstracción en el aprendizaje del álgebra

1. INTRODUCCIÓN

Observación en la clase

Como ya mencionamos en el Capítulo 1, uno de los fenómenos más simples que la observación en clase arroja sobre los fenómenos de permanencia en un nivel de lectura con niños que acaban de terminar la educación primaria (alrededor de los 12 años), es el que aparece cuando se les enfrenta con las preguntas del tipo:

Esquema de la evolución de la ecuación $Ax = B$

1. $3 \times \square = 12$
2. $3 \times \square = 672$
3. $\bigcirc \xrightarrow{\times\ 3} \textcircled{672}$
4. $3 \times x = 672$
5. $3x = 672$

Entre los 10 y los 12 años es fácil centrar a algunos estudiantes para que todas las preguntas "se lean" como [2]: ¿cuál es el número que multiplicado por 3 da 672?

Al analizar las respuestas de los niños de las edades señaladas, además de constatar que tales preguntas son distinguidas como distintas, ya que algunas se pueden contestar y otras no, nos encontramos con que es bastante fácil, con cierto perfil del alumno, lograr el "*centrarlos*" en la utilización del método aritmético preferido, que es el del tanteo, llevándolos incluso a permanecer largo tiempo utilizándolo, a pesar de que los números B cada vez son más grandes y a la postre esto les conduce a no contar ya con habilidades aritméticas suficientes como para poder contestar esta pregunta sin cometer error.

A lo largo del primer año de la educación secundaria (en el Sistema Educativo Mexicano), la mayoría de los estudiantes pasan a preferir el método de dividir B entre A para resolver la ecuación $Ax = B$, que es lo que quieren lograr los objetivos de los programas de matemáticas de este ciclo. Sin embargo, el mismo fenómeno vuelve a aparecer, con estudiantes que ya habían logrado una gran operatividad para resolver todas las ecuaciones de primer grado, cuando el contexto en que aparece la ecuación $Ax = B$ proviene de una situación de análisis en la resolución de un problema.

Pero, aún más sorprendentemente, ocurre que al aparecer la expresión $Ax = B$, escrita por el mismo sujeto en observación, estas grafías no son reconocidas como la expresión de una ecuación a la que momentos antes se la sabía manejar operatoriamente para encontrar la solución. El contexto en que aparece la ecuación, aún en su forma escrita, hace que se "*olvide*" la operatividad lograda con anterioridad, volviéndose a preferir el método aritmético del tanteo o, en algunos casos, a no poder poner en juego método alguno de resolución. Una descripción más pormenorizada de lo que está ocurriendo, en este último caso, muestra que la interpretación del signo x es crucial en la descodificación de la expresión $Ax = B$, interpretando a la x como "*una incógnita*", haciendo que el sujeto no sepa qué hacer, pues "*se trata de algo desconocido*", según sus propias palabras (recuérdese que estamos en el momento de la enseñanza en que se está tratando de lograr que el alumno empiece a utilizar lo que ha aprendido de la resolución de las ecuaciones de primer grado, para resolver los problemas de aplicación que aparecen en las clases de matemáticas, las de física, química, etc.).

Estas observaciones pueden hacerse fácilmente en el salón de clase y ahí mismo es posible inferir que estos hechos están ligados a muchos otros, muestras de las dificultades intrínsecas que el aprendizaje del álgebra presenta: los errores usuales de sintaxis cuando se trabaja operatoriamente con las expresiones algebraicas, los errores de traducción cuando se utiliza el álgebra para resolver problemas escritos en el lenguaje usual, las interpretaciones erróneas del significado de expresiones algebraicas, dados los diferentes contextos en que ellas aparecen, las dificultades para encontrarles algún significado, la imposibilidad de la utilización del álgebra para resolver problemas usuales, etc.

La observación experimental

Para poder observar con mayor precisión estos fenómenos se requiere contar con una situación experimental que permita controlar algunos factores perturbadores que siempre están presentes en el aula, contar con mecanismos de observación que permitan un análisis más exhaustivo y preciso; pero, de tal manera que lo observado no tenga sólo que ver con los problemas que presente el sujeto en observación, sino que también estén presentes las componentes que la enseñanza pone en juego.

Durante cinco años se montó en el *Centro Escolar Hermanos Revueltas*, de la Ciudad de México, un diseño experimental en el que la enseñanza de las matemáticas, a lo largo de los tres años del ciclo de educación secundaria, estuviera controlada, desde el punto de vista de los objetivos de enseñanza que se quieren obtener y también teniendo control sobre las estrategias de enseñanza que se emplean a lo largo de todo el ciclo escolar medio. Además, se instaló un laboratorio para observación clínica donde se pueden realizar entrevistas individuales o grupales y que pueden ser videograbadas. Las entrevistas clínicas tienen un formato estructurado; pero, el entrevistador se mueve libremente entre cada uno de los pasos previamente diseñados, permitiendo que sea la línea de pensamiento del sujeto entrevistado quien defina cada una de las subpartes de la entrevista. Salvo en los casos en que el entrevistado no tenga problema alguno para resolver la tarea propuesta, el entrevistador interviene para proponer nuevas interrogantes que sirvan al entrevistado para aprender (por descubrimiento) la tarea que inicialmente no pudo resolver. Se trata de descubrir las dificultades que presentan los inicios del álgebra para ser aprendidos, dadas las maneras usuales como en la actualidad se pretende enseñar. Se trata de entrevistas clínicas cuyo centro de observación son las maneras usuales de enseñar y las maneras peculiares (con sus obstrucciones y dificultades típicas) que los sujetos presentan al aprender.

Basado en esta infraestructura, se desarrolló el proyecto **Evolución de la simbolización en la población escolar del nivel medio** y dentro de él el estudio **Adquisición del lenguaje algebraico**, centrado sobre las interrelaciones entre dos estrategias globales para el diseño de secuencias de aprendizaje que cubren períodos largos de tiempo para el curriculum del álgebra en el nivel medio. Estas son:

a) Modelajes de situaciones "*más abstractas*" en lenguajes "*más concretos*", para desarrollar habilidades sintácticas.

b) Producción de códigos para desarrollar habilidades de resolución de problemas. Uso de las habilidades sintácticas para el desarrollo de estrategias de resolución.

A grosso modo, en *a*) se trata de dar significados a expresiones y operaciones nuevas, modelándolas en situaciones concretas. En *b*), se trata de dar sentidos a las expresiones y operaciones nuevas (de tal manera que se generen códigos de resolución de problemas) que parten del supuesto de contar con ciertas habilidades de uso sintáctico de los nuevos símbolos y su utilización como lenguaje "*más abstracto*".

El marco teórico

Aparte de las observaciones empíricas, como la reseñada en el primer párrafo de esta **Introducción**, las líneas teóricas que han guiado este proyecto provienen esencialmente de tres componentes : una epistemológia, basada en el análisis de textos de la Edad Media y el Renacimiento (una descripción de ella puede encontrarse en el Capítulo 11); la segunda línea, proviene de la semiótica, intentando que ésta sea guía para el análisis del álgebra a partir de su concepción como un Sistema Matemático de Signos (véase la bibliografía de la obra de U. Ecco, 1995); y por último, la psicología cognitiva en sus recientes desarrollos acerca de la adquisición del lenguaje y su relación con la pragmática de un lenguaje.

Trataremos de abordar diversos aspectos sobre la interrelación entre las componentes semánticas del problema y las sintácticas, vistas desde la óptica de las estrategias de enseñanza de tipos *a*) y *b*), arriba someramente descritas. Este Capítulo se centra, como su nombre lo indica, en las estrategias tipo *a*) y en el momento de la enseñanza en que se quiere enseñar a operar las incógnitas que aparecen en las ecuaciones de primer grado.

Aquí no se aborda el análisis de lo que ocurre cuando se utiliza un modelo totalmente sintáctico como estrategia de enseñanza, aunque en la discusión final se adelanta que también en este caso se presentan los fenómenos de la misma naturaleza que los que aquí se reseñan para los modelos concretos. No dejará de percibirse que los aspectos de las estrategias tipo b), también aquí aparecen a la hora en que se describen los mecanismos que se ponen en juego a la hora en que los procesos de abstracción se desencadenan. Sin embargo, toda la óptica estará centrada sobre las estrategias de enseñanza tipo a), sus relaciones con la aparición de los errores sintácticos usuales, sus diferencias modelo a modelo, y la relación que guardan con las actitudes previas de los sujetos, sobre todo en términos de las posiciones extremas entre las tendencias netamente sintácticas y las netamente semánticas que se presentan en los sujetos. Se pondrá énfasis en los procesos de abstracción de las situaciones planteadas, así como de las operaciones involucradas.

Una descripción general de lo que se presenta, indica que hay una dialéctica entre los avances sintácticos y los semánticos y que un adelanto en una de esas dos componentes presupone un adelanto en la otra. Este análisis se hace desde un punto de vista que corresponde a las estrategias usuales de enseñanza del álgebra. Se parte de la creencia de que los "hechos" aquí reseñados, no son tenidos en cuenta en los sistemas educativos actuales, dejándose a las rectificaciones posteriores, que espontáneamente puedan lograr los alumnos de las diversas falsas concepciones y errores de uso de las propiedades algebraicas, que se está tratando de enseñar por primera vez.

112

Guía de lectura

Aparte de esta **Introducción**, el Capítulo se ha dividido en otras cinco partes que reseñamos a continuación:

Primera. **La resolución de ecuaciones y el tránsito de la aritmética al álgebra.** Se plantean aquí los antecedentes teóricos y empíricos relevantes para el problema planteado, sobre todo para la determinación del momento del desarrollo del curriculum del álgebra en que se situará la observación experimental.

Segunda **Modelaje concreto en un momento de transición.** Se describe el momento de la observación desde el punto de vista de la enseñanza anterior y se describe la población de la cual se toman los sujetos para realizar el estudio de casos que comprende la parte clínica del estudio. La población se clasifica respecto a sus habilidades y conocimientos anteriores y, se argumenta sobre por qué, para el estudio aquí descrito, se trabaja únicamente con sujetos de la clase denominada "*estrato alto*".

Tercera **Procesos de abstracción de las operaciones a partir del uso de un modelo concreto para aprender a operar la incógnita.** Aquí se inicia la descripción del desempeño de los sujetos observados, después de una fase de instrucción para operar la incógnita con base en el modelaje de las ecuaciones en contextos "*concretos*". Se hace una breve descripción de los resultados empíricos obtenidos, para tener referentes que nos permitan una descripción de los procesos de interacción entre los aspectos semánticos y los sintácticos que se presentan en la adquisición de los primeros elementos del lenguaje algebraico.

Cuarta **Semántica vs. sintaxis algebraica.** Se confrontan dos actitudes canónicas en el aprendizaje y uso de la matemática que tienen características específicas en el caso que aquí se describe: la aplicación de un mismo modelo para operar la incógnita. Se seleccionan dos casos contrastantes: uno totalmente cargado a una actitud sintáctica y otro netamente semántico.

Quinta **Discusión final.** Se analiza el modelaje concreto como estrategia de enseñanza del álgebra. Se observa cómo sus fortalezas a veces se convierten en debilidades, enmarcando, aquí, en el contexto descrito:

la operación de la incógnita y la génesis de algunos errores sintácticos usuales. Por último, se hace una discusión acerca de cuál es la relación entre lo que se reseña y los otros problemas de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra que fueron presentados en la **Introducción**.

2. LA RESOLUCION DE ECUACIONES Y EL TRANSITO DE LA ARITMETICA AL ALGEBRA

Varias investigaciones han señalado cambios conceptuales y/o simbólicos que marcan la diferencia entre el pensamiento individual aritmético y algebraico, como por ejemplo aquellos relacionados con las distintas interpretaciones de las letras ó los concernientes a la noción de igualdad (C. Kieran, 1980 y 1981) y las convenciones simbólicas o gráficas para la codificación de operaciones y transformaciones en la resolución de ecuaciones (M. Matz, 1982). A partir de estos señalamientos es factible idealizar líneas evolutivas del pensamiento aritmético al algebraico, correspondientes a las nociones y a las formas de representación de los objetos y operaciones involucradas en los mecanismos de cambio. Así, esos cambios esenciales para acceder al conocimiento algebraico pueden visualizarse, en cada una de estas líneas, como puntos de corte entre un tipo de pensamiento y otro.

De entre tales puntos de corte, aparece uno de particular interés para el tema de la resolución de ecuaciones, el cual está sugerido por los resultados de un trabajo de análisis de las estrategias y métodos de resolución de sistemas de ecuaciones en textos de álgebra pre-simbólica de los siglos XIII y XV (Franci, 1979). En este análisis aparece como factor importante en el desarrollo de las estrategias y métodos de resolución, la cuestión de la operación de las incógnitas. Esta se presenta con las limitaciones que le confieren los marcos propios de la representación pre-simbólica de las ecuaciones y sus elementos característicos; por ejemplo, se observa que las estrategias de resolución de sistema que conducen a ecuaciones como $x^2+c=2bx$ y $x^2=2bx+c$ son completamente diferentes en un caso que en otro (Hughes, 1981 y F. Filloy/Rojano, 1984). Lo anterior no sucedería si se contase, por ejemplo, con las reglas de transposición de los términos de un miembro a otro en una ecuación, pues ello permitiría reducir, en un nivel sintáctico, el caso de una de las ecuaciones al de la otra y esto correspondería ya a un nivel evolucionado de operación de las incógnitas.

Esta especie de insuficiencia operatoria de lo representado en la etapa pre-simbólica del álgebra sugiere la presencia de un punto de corte o de cambio entre operar y no operar la incógnita, ahora en el nivel del pensamiento individual. En el estudio clínico "**Operación de la incógnita**", realizado con niños de 12 y 13 años

de edad[1] . La operación de la incógnita aparece, en efecto, como acción necesaria para resolver con métodos no-espontáneos[2] ciertas ecuaciones de primer grado con al menos dos ocurrencias de la incógnita y para cuya resolución no basta con invertir las operaciones sobre los coeficientes; las siguientes son ejemplo de este tipo de ecuaciones:

$$38x+72=56x \qquad 3x+20=x+164$$

Según el estudio, el paso de la resolución operatoria de ecuaciones como $x+27=58$ ó $4\times(x+11)=52$ a la resolución de ecuaciones como $3x+8=7x$ y $7x+2=3x+6$, por ejemplo, no es inmediato, está de por medio la construcción (o adquisición) de ciertos elementos de sintaxis algebraica, propiamente dicha. La construcción de estos elementos sintácticos se lleva a cabo sobre la base de un conocimiento aritmético hasta cierto punto bien consolidado y a su vez, sólo es posible (la construcción) si se logra romper con algunas nociones que pertenecen al dominio de la aritmética, de ahí la presencia de un corte. Pongamos por ejemplo la noción de ecuación: $Ax\pm B=C$.

En términos aritméticos, el miembro izquierdo de una ecuación corresponde a una secuencia de operaciones que se realizan sobre números (conocidos o no) y el miembro derecho, al resultado de haber ejecutado dichas operaciones; esto es lo que pudiera llamarse una noción aritmética de la igualdad (o de la ecuación). A partir de una noción tal, una ecuación del estilo $Ax\pm B=C$ (donde A, B y C son números particulares dados) puede ser resuelta con sólo deshacer, una a una, las operaciones de las secuencia de la izquierda, partiendo del resultado C. Llamaremos ecuaciones 'aritméticas' a las ecuaciones de este tipo.

Sin embargo, la noción aritmética de igualdad no se aplica a una ecuación de la forma $Ax\pm B=Cx\pm D$ (donde A, B, C y D son números particulares dados) y por tanto, su resolución operatoria involucra operaciones fuera del ámbito de la aritmética, como ejemplo, la operación de la incógnita. Para que dichas operaciones puedan llegar a tener sentido para el sujeto y así poder llegar a desencadenarse en un proceso de resolución de la ecuación, se requiere, a su vez, de que las ecuaciones como las de la forma aquí descrita (que llamaremos ecuaciones 'no-aritméticas') estén provistas de algún significado; ello, por otro lado, implica una modificación de fondo de la noción de ecuación o igualdad numérica.

Ahora, en relación al '*significado*' de las '*nuevas*' ecuaciones, habrá que entender que las expresiones en ambos miembros de la igualdad son de la misma

1 La observación se desarrolla en el Centro Escolar Hermanos Revueltas en el D.F., México, con niños que reciben instrucción en matemáticas dentro de un sistema de enseñanza controlada.

2 El tanteo o la adivinanza de la solución son ejemplos de métodos espontáneos de resolución.

naturaleza (o estructura) y que hay una serie de acciones que le dan sentido a la igualdad entre ellas (como por ejemplo las acciones correspondientes a la sustitución del valor numérico de 'x').

Los cambios o modificaciones profundos en hábitos y nociones aritméticos no se dan de manera espontánea en el sujeto al sólo enfrentarlo a la necesidad de que dichos cambios se lleven a cabo[3]; la intervención con enseñanza, en ese momento de transición del conocimiento aritmético al algebraico, puede resultar crucial para la mayoría de los sujetos que aprenden por primera vez álgebra (Filloy/Rojano, 1984).

Por otra parte, si bien es necesario modificar algunas nociones aritméticas en aras de la adquisición de un nuevo conocimiento, el algebraico, también se requiere que el conocimiento anterior (el aritmético en este caso) pueda ser preservado, ya que aún en este solo ejemplo de las ecuaciones que hemos presentado, es necesario que, a la postre, las ecuaciones aritméticas sigan siendo reconocidas como tales, a fin de preservar toda la operatividad adquirida anteriormente para su resolución; esta operatividad se ubica en un nivel de conocimiento intermedio entre el aritmético y el algebraico, el del conocimiento pre-algebraico.

3. MODELAJE CONCRETO EN UN MOMENTO DE TRANSICION

Como se decía en el apartado anterior, son esenciales los cambios en la concepción de las operaciones realizadas sobre objetos como números, para dar cabida a la concepción de operaciones sobre objetos '*distintos*' a los números (como las incógnitas) y a la concepción de los objetos mismos (lo que representan o pueden llegar a representar) por ello, la enseñanza del álgebra, en este punto requiere de echar mano de recursos didácticos mediante los cuales se pongan en juego las relaciones entre elementos que intervienen en la realización de tales cambios.

Una de dos posiciones encontradas, respecto de qué tipo de recursos didácticos utilizar para este fin, es la que propone '*modelar*' en contextos (más) '*concretos*' (es decir, contextos familiares para el alumno) las nuevas operaciones y los nuevos objetos, con el propósito de dotarlos de significados y tomando éste como punto de partida, construir los primeros elementos de sintaxis algebraica. Una posición antagónica a la anterior es la que propone partir del nivel sintáctico y

[3] Tal es el caso de los niños del estudio "Operación de la Incógnita" , quienes en el momento de la observación no han recibido instrucción para mover la incógnita en la resolución de ecuaciones. Al enfrentar a estos niños, por primera vez, con las ecuaciones de la forma $Ax \pm B = Cx$, ellos las abordan con métodos de tanteo, sin ningún indicio de operar espontáneamente los términos 'x'.

enseñar las reglas algebraicas[4] en este nivel para aplicarlas, más tarde, en la resolución de ecuaciones y problemas.

Si para desarrollar estrategias de enseñanza en los inicios de la adquisición del lenguaje algebraico se adopta la primera de las dos posiciones ya señaladas, es necesario saber acerca de los procesos que median entre las acciones que se realizan en un nivel '*más concreto*' (es.decir, las acciones en el modelo) y los correspondientes elementos de sintaxis algebraica que se obtengan a partir de ellas. Estos procesos, que aquí llamaremos "de abstracción de las operaciones"[5], presentan características regulares en el curso de su desarrollo por los individuos, pero también recorren trayectorias que pueden diferir grandemente de un sujeto a otro, debido a la presencia de tendencias en éste, en relación a su uso y a su aprendizaje de las matemáticas.

Por otra parte, si bien existe un conjunto de características regulares o que se repiten sujeto a sujeto en tales "*procesos de abstracción de las operaciones*", algunas de ellas pueden variar al variar la situación 'concreta' (o el modelo) de la (del) cual se parta para obtener o construir los elementos sintácticos correspondientes.

A fin de clarificar las ideas expuestas con anterioridad, nos referimos en adelante a algunos de los resultados obtenidos en el estudio clínico "**Operación de la Incógnita**", realizado con niños de 12 a 14 años de edad y quienes, en el momento de la observación, no habían recibido instrucción para resolver ecuaciones lineales en una incógnita, con dos o más ocurrencias de ésta, es decir, las que hemos llamado ecuaciones '*no-aritméticas*'.

El estudio "Operación Incógnita"

Trabajos realizados en dos campos distintos anteceden a esta investigación, a saber, el análisis de partes de textos matemáticos y obras de transición que preceden a la primera obra de álgebra simbólica, "*El Arte Analítico*", de F. Vieta [Witmer, T. R, 1981], y la experimentación de secuencias pedagógicas, cuya escritura está basada, a su vez, en trabajos de análisis histórico-crítico del desarrollo de las ideas matemáticas (véase Capítulo 11). A través de la realización de estos trabajos previos, se llega a conjeturar la existencia y localización del corte didáctico mencionado anteriormente, en la línea de evolución del pensamiento aritmético al pensamiento algebrai-

[4] Este es el tratamiento tradicional en la enseñanza de la resolución de ecuaciones basado en los modelos sintáctico-viético (transposición de términos de un miembro a otro) y euleriano (adición y multiplicación de los inversos aditivos y multiplicativos, respectivamente en los dos miembros de la ecuación).

[5] Nos referimos a los procesos de recuperación, en un nivel sintáctico, de los elementos comunes a las acciones ejecutadas en el uso reiterado de un modelo o situación '*concreta*' de enseñanza.

co en el niño. Dicho corte didáctico se corresponde (con las distancias que median entre un ámbito y otro) con cambios importantes en la historia del surgimiento del álgebra simbólica, concernientes a la concepción y operación de objetos como las incógnitas. De este modo, en una de sus partes, la investigación sobre la adquisición del lenguaje algebraico, se centra sobre el estudio de los procesos de cambio que se suscitan en una vecindad pequeña del corte. El estudio **"Operación de la Incógnita"** se ubica en dicho momento y su preparación comprende dos etapas: el diseño y aplicación de un tratamiento de enseñanza previo a la observación clínica, que permita hacer un alto en la enseñanza en el momento antes señalado y la parte correspondiente al diseño y aplicación de una prueba diagnóstica sobre eficiencia pre-algebraica, para elegir los sujetos a observar, en función de su ejecución en dicha prueba; los resultados del diagnóstico también son utilizados en el diseño y montaje de la observación clínica.

En términos de la enseñanza, el corte se localiza

Aquí

↓

Los niños ya han aprendido a resolver ecuaciones 'aritméticas'	Los niños no han recibido instrucción alguna para resolver las primeras ecuaciones 'no aritméticas'.
Algunos ejemplos son:	Algunos tipos son:
$Ax \pm B = C$	$Ax \pm B = Cx$
$Ax(Bx \pm C) = D$	$Ax \pm B = Cx \pm D$
$\frac{x}{A} = B\frac{x}{A} = \frac{B}{C}$	
Para resolverlas, es suficiente con invertir las operaciones (aplicadas a los datos del problema).	Para resolverlas no basta con invertir las operaciones (aplicadas a los datos del problema).
No hay necesidad de operar la incógnita	Es necesario operar lo representado

↑

El estudio se llevó a cabo en el momento del corte.

Los propósitos del estudio "Operación de la Incógnita", en lo que toca a la parte de la observación clínica son:

1. Analizar las respuestas espontáneas de los niños, cuando se les enfrenta por primera vez a la resolución de ecuaciones '*no-aritméticas*'.

2. Analizar la ejecución de los niños en la resolución de ecuaciones '*no-aritméticas*', inmediatamente después de proporcionales (durante la misma entrevista) una fase de instrucción para operar la incógnita.

Los propósitos 1 y 2 están dirigidos hacia finalidades más generales del estudio:

a) Corroborar la ubicación y percepción, por parte del niño, del corte didáctico entre operar y no operar la incógnita.

b) Aislar aquellos fenómenos relativos a conductas de anclaje en el conocimiento aritmético, los cuales pudieran corresponder a obstrucciones para la adquisición del lenguaje algebraico.

c). Reconocer problemas de aprendizaje de los nuevos conceptos, provenientes de la manera en que se enseñan y provenientes de las estrategias de enseñanza con que se ha pretendido enseñar los temas pre-algebraicos.

Estamos interesados en tratar el tema de los procesos que se desencadenan al introducir nuevos conceptos y operaciones por medio de algún modelo '*concreto*' de ahí que sólo nos referiremos a los objetivos señalados en 2, b y c, los cuales tienen una relación más directa con la enseñanza.

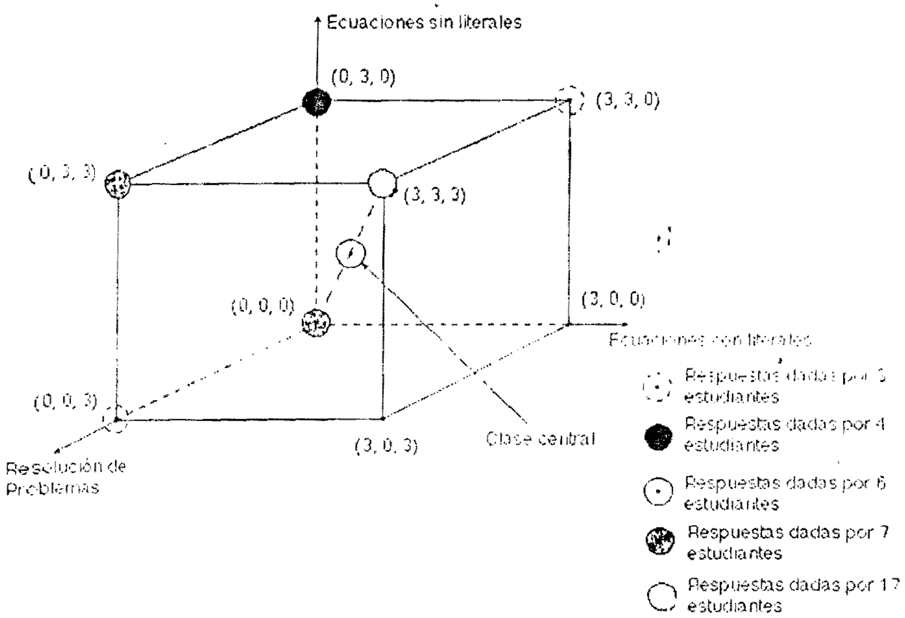
La población estudiada comprende tres generaciones de niños de 12 y 13 años de edad, del segundo año de secundaria, de un mismo centro escolar, quienes reciben instrucción en matemáticas dentro de un sistema de enseñanza controlada[a].

El test escrito sobre pre-álgebra comprende tres sub-temas: ecuaciones '*aritméticas*' con notación literal (por ejemplo, $5x + 3 = 90$); ecuaciones '*aritméticas*' sin notación literal (por ejemplo, $-95 = 23$) y problemas correspondientes a ecuaciones '*aritméticas*'.

Una vez establecidos y aplicados los criterios de la clasificación de la población respecto a cada uno de los ejes (sub-temas) considerados en el test de pre-

[a] La población en estudio recibe instrucción en matemáticas con materiales que les permite realizar trabajo individual en clase, con ritmo propio. Se lleva un control de los avances individuales y grupales de los estudiantes y se tiene la posibilidad de intervenir con materiales laterales de enseñanza, en los casos que lo requieran.

álgebra, se obtienen distribuciones, respecto a todo el test en su conjunto, como la siguiente:



El grupo a observar corresponde a niños ubicados sólo en las clases a lo largo de la diagonal principal, incluyendo algunos casos que contravienen el orden de algunos de los ejes, es decir, niños ubicados en las clases correspondientes a los demás vértices del cubo.

En relación al objetivo 1 de estudio, es decir, al que se refiere a las respuestas espontáneas de los niños ante las "*primeras ecuaciones no-aritméticas*", fueron consideradas, en cada generación de niños, las tres clases que aparecen a lo largo de la diagonal principal, a las cuales denominamos estratos bajo, medio y alto, respectivamente. En total fueron entrevistados veintisiete niños, las entrevistas fueron videograbadas.

Las secuencias de ítems que conforman la entrevista clínica son las siguientes (1)*

116

* (1) Estos son los ítems básicos de las secuencias, pero se modificaron tanto el orden de los ítems como de algunas secuencias, según el desarrollo de cada entrevista, así como en ocasiones se confeccionaron ítems adicionales.

La entrevista clínica

Cinco secuencias de ítems:

Secuencia E: verificación del pre-test.

$x+5=8$

$x-4=8$

$x+27=58$

$x-15=143$

$x+1568=392$

Ecuaciones aritméticas

$13\times\quad=39$

$3\times x=39$

$6\times\quad=34434$

$(x+3)\times 6=48$

$4\times(x+11)=52$

Secuencia C: la ecuación como equivalencia

$x+5=5+2$

$x+\frac{141}{16}=7+\frac{141}{16}$

$x+\ 17=41+\ 17$

$x+\frac{x}{4}-6+\frac{x}{4}$

Cancelación

$x+5=2+5$

$x+2=2x+x$

$x+2=x+x$

$x+5=x+x$

Secuencia I: operando la incógnita

$x+2=2x$

$2x+4=4x$

$3x+8=7x$

$3x+8=6x$

$3+2x=5x$

$5x=2x+3$

$5x=3+2x$

$7x+2=3x+6$

Ecuaciones 'no aritméticas'

$7x+15=8x$

$38x+72=56x$

$37x+852=250x$

$2x+3=5x$

$3x+20=x+164$

$0x-18=4x$

$0x-8=4x+6$

$7x-20=5x+30$

Secuencia A: Problemas de "encontrar un número"

En relación al objetivo 1 del estudio, el análisis cruzado: secuencias de la entrevista versus los tres estratos de sujetos arroja resultados que permiten, por un lado, confirmar la presencia del corte didáctico (sobre todo, basándose en la ejecución de los niños de estrato alto) y por otro, delinear los acercamientos característicos propios de cada '*estrato*' a la situación que representa el corte, es decir, a la resolución '*espontánea*' de las ecuaciones '*no aritméticas*', secuencias *C* e *I*.

Para abordar el objetivo 2 del estudio, es decir, el que se refiere al desempeño de los niños a partir de una fase de instrucción para operar la incógnita con base en el modelaje de las ecuaciones en contextos '*concretos*', tanto la administración de las segunda parte de la entrevista clínica como su análisis están enfocados a los niños de estrato alto. Esto se debe esencialmente a que es necesario tener asegurado un cierto grado de dominio del lenguaje aritmético y pre-algebraico a fin de poder asimilar fenómenos auténticos de transición, sin correr el riesgo de que dichos fenómenos puedan tener una relación causal con deficiencias en conocimientos básicos, sobre los cuales va a erigirse el nuevo Sistema Matemático de Signos.

Esta parte del estudio se inicia con una fase de instrucción para operar la incógnita en el momento en que el niño deja de intentar resolver con sus propios medios, las ecuaciones de la secuencia I.

En la siguiente sección, se hará una breve reseña de los resultados en esta segunda parte del estudio clínico, a fin de tener referentes empíricos para la descripción de los procesos de interacción entre los aspectos semántico y sintáctico en la adquisición de los primeros elementos del Sistema Matemático de Signos Algebraicos.

4. PROCESOS DE ABSTRACCION DE LAS OPERACIONES, A PARTIR DEL USO DE UN MODELO PARA APRENDER A OPERAR LA INCOGNITA

Aunque hay bases teóricas para confiar en que un primer acercamiento semántico [illegible] más conveniente para el buen desempeño algebraico posterior que un [illegible] meramente sintáctico, [illegible] no significa que la construcción de la [illegible] a partir de ese [illegible] acercamiento, sea inmediata; están de [illegible] procesos de abstracción [illegible] operaciones que se realizan con los ele- [illegible] '*concreta*' [illegible] modelando los nuevos objetos y [illegible] procesos presup[illegible] su [illegible] tros, como el proceso de gene- [illegible] las acciones en el [illegible] y el proceso de discriminación de los [illegible] casos a modelar, entre otros.

Como ya se ha señalado en una sección anterior, para fines de este estudio, se parte de la base de que una de las primeras operaciones algebraicas, propiamente dichas, es la operación de la incógnita para la resolución de ecuaciones lineales '*no-aritméticas*', y se adopta la posición de introducir semánticamente dicha operación mediante la utilización de modelos '*concretos*'.

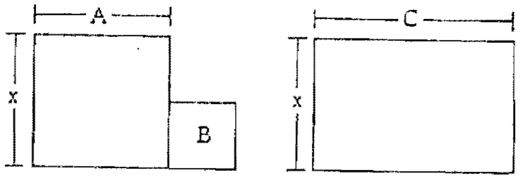
Dos modelos son utilizados, la balanza y un modelo geométrico. A continuación se hace una descripción esquemática de ellos.

Descripción esquemática de los dos modelos utilizados para enseñar a operar la incógnita:

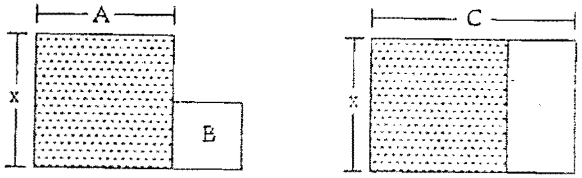
Modelo geométrico: Ecuación propuesta $Ax + B = Cx$, A, B y C enteros positivos y $C > A$, en este caso.

Nota: A los niños se les presentan ecuaciones, donde A, B y C son números particulares:

1. Reproducción del modelo (Traducción de la ecuación al modelo)



2. Comparación de áreas:



3. Elaboración de la ecuación simplificada: $(C\text{-}A)\,x = B$.
4. Resolución de la ecuación simplificada.
5. Verificación de la respuesta.

Modelo de balanza: Ecuación propuesta $Ax + B = Cx$, A, B y C son enteros positivos dados y $C > A$, en este caso.

1. Reproducción del modelo (Traducción de la ecuación al modelo)

□ □ □...□	■ ■ ■...■		□ □ □...□
(A) Objetos con igual peso (desconocido).	(B) Objetos con igual peso (conocido).	(C) Objetos con igual peso (desconocido).

2. Reducción iterada de los objetos de peso desconocido, manteniendo el equilibrio, hasta eliminar todos los objetos de este tipo de uno de los platillos.

■ ■...■		□ □...□
(B) Objetos	(C-A) Objetos

3. Elaboración de la ecuación simplificada $(C - A)\,x = B$

4. Resolución de la ecuación simplificada.

5. Verificación de la respuesta.

En el caso de los dos modelos, a los niños de alta eficiencia pre-algebraica se les proporcionan sólo los primeros elementos del modelo (Fase 1 de traducción) dejando que por sí solos desarrollen las etapas subsiguientes con la mínima ayuda posible por parte del entrevistador. Una vez dominado el uso del modelo para una modalidad de ecuación $(Ax + B = Cx)$, se les proponen modalidades cada vez más complejas ($Ax + B = Cx + D$; $Ax - B = Cx + D$; $Ax - B = Cx - D$, etc.) a fin de observar la transferencia del uso del modelo a estas modalidades, así como los procesos de abstracción de las operaciones realizadas una y otra vez en el modelo.

Resultados

En el desarrollo de las entrevistas se ponen de manifiesto procesos de abstracción de las operaciones sobre nuevos objetos (las incógnitas en este caso), a partir de [illegible]izar acciones sobre ellos en el modelo, hasta llegar a operarlos en el nivel del [illegible] si[illegible]. En estos proceso de abstracción se detectaron fenómenos como:

[illegible] mentánea de [illegible] s an[illegible] acompañada de la presencia [illegible]clada [illegible]ca. [illegible] más frecuente es el del apa[illegible] operat[illegible] re[illegible] llamadas ecuaciones '*arit*-[illegible] és [illegible] ne[illegible] medios en el proceso de [illegible]acion[illegible] *métic*[illegible] el uso de algún modelo. Se trat[illegible] no-reconocimien[illegible] ecu[illegible] simplificada $(C\text{-}A)\,x = B$ como

una ecuación que ya se sabía resolver sintácticamente; esto obedece a un fenómeno de centración en el modelo, lo cual impide que el niño le dé una lectura a la ecuación simplificada como una expresión desligada de los significados concretos que el modelo le confiere.

Ejemplo: Fragmentos de la entrevista con Valentina, 13 años, estrato alto, mostró en la serie E una alta eficiencia para resolver ecuaciones 'aritméticas', aún con soluciones negativas.

Ecuación propuesta: $8x + 30 = 5x + 9$

Por medio del modelo geométrico llega a plantear la ecuación simplificada: $3x + 30 = 9$

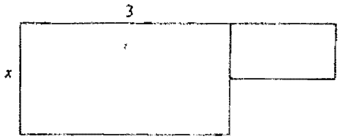
V: "¿Cómo?"

E: "¿Crees que podrías ahora resolver ésa?"

V: "Nueve menos... (señala el nueve de la derecha y con movimiento hacia la izquierda, señala el 30) ... Nueve menos un número mayor que nueve, me va a dar número negativo, entre tres...".

V: no da la respuesta y después de que el entrevistador se la pide, V procede a usar el modelo geométrico (que en este caso no es pertinente usarlo):

$3x + 30 = 9$



El entrevistador le pide a V que resuelva la ecuación $3x + 30 = 9$ sin el modelo.

E: "¿La puedes resolver?"

V: "No".

Después de unos minutos:

V: "Bueno, si quieres la hago con..." Toma la calculadora y recupera su operatividad anterior, invierte las operaciones y obtiene $x = -7$

2. La modificación de la noción aritmética de ecuación:

i) Por medio de enfrentar distintas modalidades de ecuaciones, cuya estructura no necesariamente concuerda con la de los ejemplos utilizados durante el modelaje.

Ejemplo: Reseña de una secuencia de ítems de la entrevista con Matilde, 13 años, estrato alto, en este momento ella ya ha abstraído las acciones del modelo en un nivel sintáctico y prescinde de él para la resolución de las ecuaciones. De entrada, no identifica entre sí las ecuaciones: $2x + 3 = 5x$, $3 + 2x = 5x$, $5x = 2x + 3$ y $5x = 3 + 2x$.

I Mt. 16	I Mt. 19
$2x+3=5x$ $2x+3=5x-2x=3x$	$5x=2x+3$
I Mt. 17	M modifica la ecuación para resolverla como la del ítem anterior:
$3+2x=5x$	
La permutación de términos en el miembro izquierdo hace dudar a M sobre el movimiento que debe realizar con la 'x'.	$5x=2x+3$ $2x+3=5x$ $2x+3=5x-2x=3x$
I Mt. 18	I Mt. 20
$2x+3=5x$	$5x=3+2x$
Se le presenta a M la ecuación del ítem 16 para que las compare. Ella reconoce que son la misma ecuación, salvo por la permutación de los términos, pero reconoce también que no se había dado cuenta de ello.	A pesar de que M identifica esta ecuación con la del ítem anterior, no le asigna la solución ya encontrada para esta última; le asigna el mismo método de solución: $5x=3+2x \quad 3x \qquad x=1$

ii) Por medio de la necesidad de no sólo darles significado a los términos de la ecuación, sino de dotar de sentido a estas nuevas expresiones y a las operaciones que se requieren para utilizarlas. Una manera de darles sentido se presenta vía el proceso de verificación, al darle un nuevo significado a las ecuaciones algebraicas en que aparece la igualdad, como aquellas en las que es posible hacer una serie de operaciones, de tal manera que se obtiene un valor de la incógnita, y cuando se sustituye en el miembro izquierdo y se realizan las operaciones indicadas y se hace lo propio en el otro miembro, los resultados coinciden.

119

Ejemplo: Matilde, después de 25 ítems resueltos, unos con el modelo geométrico y los últimos ya en un nivel sintáctico, en la etapa de verificación de

la respuesta a $10x-18=4x+6$, M da, espontáneamente, una interpretación 'más algebraica' de la ecuación:

Subserie I-g

I Mt. 26 $10x-18=4x+6$

M: da, espontáneamente, una interpretación 'más algebraica' a la igualdad.

M: "O sea que son equivalentes".

E: '¿Qué quieres decir que sean equivalentes?"

M: "... Si yo saco cuánto vale 'x' y hago esta operación (señala miembro izquierdo), me sale un resultado, éste resultado tiene que ser igual a éste (señala miembro derecho)".

Resuelve la ecuación con el método 'operar la incógnita en la ecuación'.

Nota: Al inicio de la serie I, Matilde interpretaba una ecuación 'no-aritmética' como 'dos ecuaciones equivalentes' (refiriéndose a los dos miembros de la ecuación, puesto que en ambos había ocurrencias de 'x') y sólo en este ítem que ella explícita su interpretación en términos operativos.

3. El uso de grafías (códigos) personales para indicar las acciones ya realizadas y las acciones por realizar sobre los elementos de la ecuación en el proceso de resolución. Esto sugiere la existencia de una etapa previa a la etapa operacional algebraica. En esta etapa, se presentan también obstrucciones que dichas grafías imponen cuando la complejidad de las ecuaciones aumenta, generando lo que después, en el estudio posterior del álgebra se consideran '*errores naturales de sintaxis*': uso inadecuado de los signos de igualdad, ausencia de éstos, olvido de algunos términos, etc.

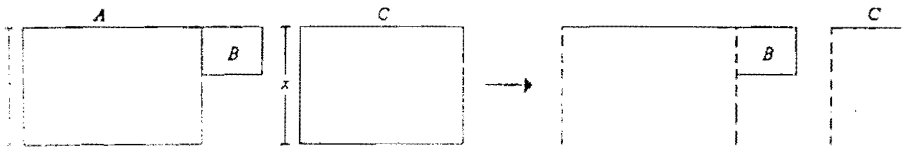
Un ejemplo ilustrativo es el de Mt, quien abandona rápidamente el uso del modelo concreto para operar la incógnita y genera sus propias grafías y códigos para indicar las acciones sobre los elementos de la ecuación.

4. El arraigo al modelo (aún en casos muy complejos de representar), el cual subyace a una operatividad algebraica aparente sobre los elementos de la ecuación.

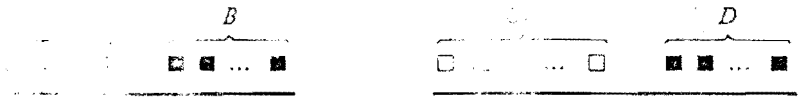
Ejemplo: Valentina, después de 28 ítems de la serie I, continúa utilizando el modelo geométrico, sin dar muestras de algún intento de prescindir de él. Los siguientes son los últimos ítems de la entrevista, con un alto grado de complejidad en su modelaje:

mente complejo. En el otro caso, el de tendencia operatoria, hay una búsqueda constante de los elementos de sintaxis que hay en las acciones en el modelo, que se repiten en la resolución de cada ecuación y en cada modalidad de ecuación; esta búsqueda provoca un desprendimiento rápido de la semántica del modelo, para modelar esas acciones en un lenguaje más abstracto, mediante la creación de grafías personales, las cuales no pertenecen ni al modelo ni al álgebra, se ubican en un nivel intermedio previo al operacional algebraico.

2. Hay obstructores a la abstracción de las operaciones en el modelo hacia un nivel sintáctico-algebraico que no dependen ni del modelo particular utilizado ni de las tendencias en los sujetos como las mencionadas en 1); dependen del énfasis puesto en la componente del modelaje que permite apoyarse en conocimiento anterior y operaciones dominadas por el sujeto, para introducir los nuevos objetos, conceptos y operaciones; esta reducción de lo nuevo a lo conocido comporta el riesgo de ocultar las dificultades de operar con los nuevos objetos y de poner en juego los nuevos conceptos. En efecto, en los procesos de abreviación y automatización de las acciones en los dos modelos aquí utilizados, se observa una tendencia a ocultar la operación real de la incógnita. En el modelo geométrico, la abreviación conduce a un desvanecimiento de las áreas que involucran a la incógnita, de hecho, la dimensión lineal que se pierde es la que representa a la incógnita y las operaciones se reducen a operaciones entre los "*datos*" de la ecuación, dejando la incógnita de jugar algún papel:



En la balanza, debido a la discretización de los coeficientes de 'x' y de los términos constantes, es posible realizar operaciones del mismo tipo con unos como con los otros, siendo estas operaciones entre *números de objetos* con peso conocido y *número de objetos* con peso desconocido.



[illegible]atización (en los dos modelos) conduce a cometer errores típicos de sintaxis algebraica como [illegible] sumar (o restar) en forma [illegible] coeficientes de términos de distinto grado; aún sujetos con una [illegible]toria comete[illegible] mismo tipo de errores, a causa del

uso de sus grafías personales, las cuales se generan también en un proceso de automatización de las acciones.

$$Ax+B=Cx+D \rightarrow (A+B-D)+C.$$

O bien, introducir paréntesis "*artificiales*" en algunas expresiones: $B+Ax \rightarrow (B+A)x$ aislando las operaciones entre números de su operación con la incógnita.

Contrastación de uso de dos modelos distintos para operar la incógnita

En una tercera fase del estudio clínico "**Operación de la Incógnita**", se hace un análisis comparativo entre las observaciones realizadas en la ejecución de niños de estrato alto (en cuanto a operatividad **pre-algebraica**) en la resolución de ecuaciones 'no-aritméticas', utilizando el *modelo de la balanza* y las observaciones concernientes a los procesos de abstracción de las operaciones del modelo hacia un nivel sintáctico, en el caso del *uso del modelo geométrico*.

El interés de realizar esta comparación entre modelos es el de poder identificar aquellos fenómenos que se suscitan durante los procesos de abstracción de las operaciones en el modelaje y que *no* dependen del modelo específico que se utilice; aunque, también existe el interés de detectar las variaciones de modelo a modelo, a fin de que puedan ser tomadas en cuenta al proponer estrategias de enseñanza basadas en ellos.

Entre los resultados más relevantes en cuanto a los aspectos que varían de un modelo a otro, se encuentran los siguientes:

1. Hay maneras específicas (según cada modelo) de traducir los elementos de la ecuación al modelo, que representan una obstrucción al progreso en el uso de éste. En el modelo

IMt.13 $129x+51=231x$

$$129x+51=231x-$$

$$129x+51=231x-129x=102x$$

$$129x+51=231x-129x=102x$$

M: "**Entonces 'x' es igual a dos**" (Respuesta errónea)

Digitalizado por: I.S.C. Hèctor Alberto Turrubiartes Cerino
hturrubiartes@beceneslp.edu.mx

IMt. 14 $37x + 852 = 250x$

Aplica el método de "operar la incógnita en la ecuación" y lectura estilo abbaco.

$$37x + 852 = 250x - 37x = 213x$$

M: "¿Qué número multiplicado por 213 nos da éste (señala 852)?"

$$37x + 852 = 250x - 37x = 213x$$

IMt.15 $x + 5 = 2x$

$$x + 5 = 2x - x = 1x$$

$$x + 5 = 2x - x = 1x$$

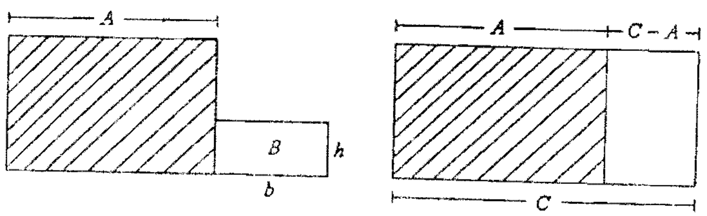
M: "Una 'x' tiene que ser igual a 5, o sea que 'x' es igual a 5.

En referencia al ítem IMt. 14, cabe notar que Mt. no escribe la ecuación simplificada con las grafías del álgebra, aunque sí maneja la igualdad $102x = 51$, ya que la señala con una flecha y la resuelve (erráticamente porque usa erráticamente un hecho específico). Mt. crea sus propias señales para explicar la ecuación simplificada y los señalamientos que la acompañan permiten ver las acciones que se hicieron antes y las que hay que realizar para la resolución; ésta es una etapa previa al nivel operacional en el cual la ecuación simplificada se escribe con la sintaxis algebraica.

Esta etapa previa a la operacional juega un papel muy importante para desarrollar operaciones en matemáticas; antes de tener las acciones estabilizadas en un nivel operacional, uno se guía con señales propias creadas (por uno) para el tipo de problema que está atacando, aún después, aunque se creen maneras más reducidas y más sintácticas de hacer las operaciones involucradas, siempre esta estrategia de dibujar (con señales propias) es una gran ayuda para ver qué es lo que se está haciendo. De hecho, Mt. está creando la manera de indicar el proceso con una grafía en que está escrito qué se está haciendo, qué está correspondiendo con qué; en realidad, la que Mt. explicita es una ecuación simplificada con muchas más señales, pero que le permite ver lo que se ha hecho antes y lo que se tiene que hacer después.

En lo geométrico, dicho obstructor, consiste en desglosar en dimensiones lineales [illegible]ea rectangular que representa al término medio constante (B en $Ax + B = Cx$)

lo cual conduce a aplicar el método de "*acoplamiento de las dimensiones lineales*" para la resolución (i.e., encontrar b y h tales que $b \times h = B$ y $b = C - A$ ó $h = C - A$, misma que no es aplicable en el caso de que B no sea divisible por C-A:

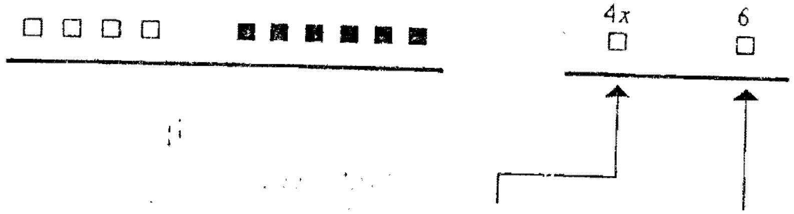


Si $C - A$ no divide a B, entonces, no es posible encontrar b y h con las características deseadas.

En la balanza, al tratar de asignar unidades de peso a los objetos en la balanza, puede causar confusión en el desarrollo de la estrategia inicial "*natural*" del modelo, la cancelación reiterada de pesos idénticos y además, debilita la noción de incógnita en el contexto de la situación 'concreta':

$$4x + 6 = 2x$$

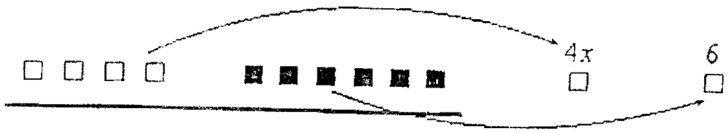
El valor de ésta 'x' debe ser menor que el valor de esta 'x'



Niño: Digamos que el valor de ésta es 6 gramos y ésta es $4x$.

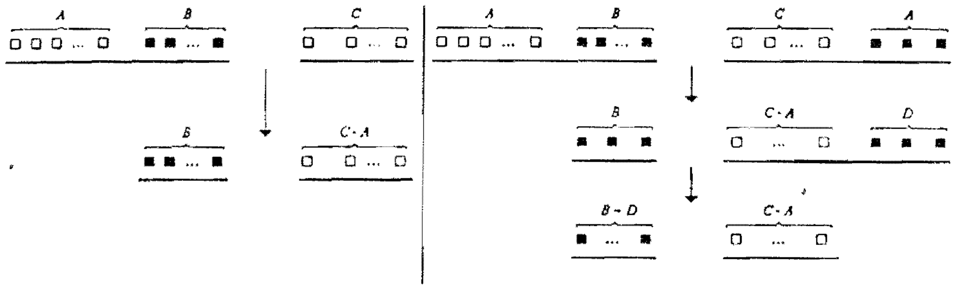
Entrev. ¿No pesan lo mismo?

Niño: Sí, son iguales.



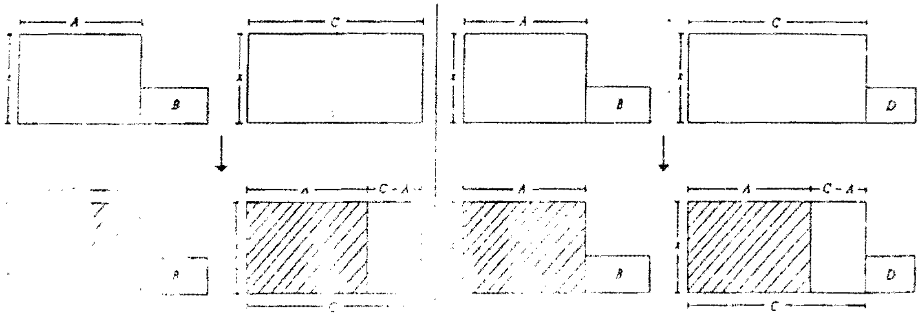
2. algunas transferencias del uso del modelo de una modalidad a otra de la ecuación son más "*naturales*" en un modelo que en otro. El paso de la modalidad $Ax + B = Cx$ a $Ax + B = Cx + D$ es más natural en la balanza, dado que la acción de la cancelación reiterada es esencialmente la misma en un caso que en otro, además de que en este modelo, la ecuación simplificada queda planteada en el modelo mismo y puede ser resuelta sin tener que traducirla a las grafías del álgebra.

De: $Ax + B = Cx$ a: $Ax + B = Cx + D$ (sup. $B > D$)



mientras que en el modelo geométrico, es necesario darse cuenta de que basta con superponer las áreas correspondientes a los términos de grado uno, sin realizar ninguna acción sobre las correspondientes a los términos constantes, para poder plantear la ecuación simplificada, i.e., en este caso la transferencia del uso de un modelo a una nueva modalidad de ecuación no es trivial.

De: $Ax + B = Cx$ a: $Ax + B = Cx + D$

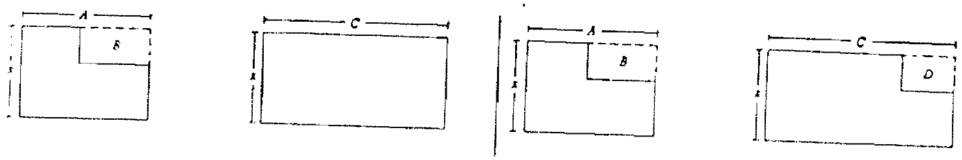


cada:

$(C - A)x = B$ $(C - A)x = B - D$

Sin embargo, el paso a modalidades como $Ax - B = Cx$ ó $Ax - B = Cx + D$ requiere de interpretar, en el modelo, términos constantes "*negativos*", los cuales en la balanza no tienen representaciones "*concretas*" que les correspondan (a no ser representaciones que se deriven de acciones mentales, como por ejemplo el restablecimiento del equilibrio), mientras que en el contexto de áreas, dichos términos pueden interpretarse como acciones "*concretas*" de remover áreas equivalentes a los valores absolutos de los términos en cuestión, sin violentar, de esta manera, la semántica del modelo:

$Ax - B = Cx$ ó $Ax - B = Cx - D$



Finalmente, en el caso de una solución negativa, no hay forma de llevar a cabo acciones en el modelo concreto para '*simplificar*' la ecuación propuesta, en ninguno de los dos modelos, como por ejemplo en: $4x + 6 = 2x$. Esta ecuación sí puede representarse tanto en el modelo de la balanza, como en el geométrico, pero en ambos casos, las acciones de simplificación '*dentro del modelo*', conducen a situaciones que, en el nivel concreto, carecen de sentido, como pueden ser áreas o pesos igualados a cero y que en sus representaciones '*concretas*' o gráficas no lo son.

6. DISCUSION FINAL

El modelaje y la enseñanza del álgebra

Los resultados obtenidos en esta parte del trabajo permiten afirmar que la rectificación tanto de los errores de sintaxis algebraica, como las vicisitudes operatorias que se presentan en medio de procesos complejos de resolución de problemas o ecuaciones, los cuales se generan durante el aprendizaje del álgebra, no pueden dejarse a la espontaneidad con que los niños hacen uso de los primeros elementos que se les proporciona para incursionar en el terreno del álgebra, ya que las trayectorias que trazan esos desarrollos espontáneos no se dirigen hacia lo que la enseñanza del álgebra pretende lograr; por ello, precisamente, esa rectificación es tarea de la enseñanza. De modo que si se piensa en la introducción de ciertas nociones algebraicas por medio de modelos (incluido el modelo sintáctico), es conveniente tener en mente algunas de las principales componentes del modelaje.

El modelaje tiene dos componentes fundamentales, una, la de la traducción, por medio de la cual se les dota de sentidos y significados en un contexto más '*concreto*' a los nuevos objetos y operaciones que se introducen, mismos que aparecen en situaciones más abstractas; es decir, mediante traducción, a dichos objetos y operaciones se les relaciona con elementos de una situación '*concreta*', ésta es un estado de cosas que representa, a su vez, un estado de cosas en la situación más abstracta (en el caso del modelo geométrico, la igualdad entre áreas o magnitudes corresponde a una igualdad entre expresiones algebraicas) y a partir de lo que ya se sabe en el nivel más 'concreto' acerca de la resolución de tales situaciones, se introducen operaciones, las cuales, aunque se lleven a cabo en lo '*concreto*', se pretende que también se realicen sobre los objetos correspondientes del nivel más abstracto; por ello, se hace necesaria una traducción de ida y vuelta de un contexto a otro, para que sea factible la identificación de cada operación del nivel más abstracto con la correspondiente en el modelo '*concreto*'.

Una segunda componente del modelaje es la separación de los nuevos objetos y operaciones de los significados más 'concretos' con que fueron introducidos; es decir, el modelaje también pretende lo que Mt pretende desde un principio, que es desprenderse de la semántica del modelo '*concreto*', ya que, a la postre, lo que se quiere lograr, no es resolver una situación que ya se sabe que se puede resolver, sino encontrar las maneras de resolver situaciones más abstractas, vía operaciones más abstractas. Esta segunda componente es un principio motor que orienta la función del modelaje hacia la construcción de una sintaxis extra modelo.

El estudio aquí reseñado muestra que el dominio de la primera de las componentes del modelaje (la traducción) puede debilitar o inhibir el desarrollo de la segunda; tal es el caso de sujetos que, como Vt., logran un buen manejo del modelo "*con[illegible]to*", pero que debido a ello, desarrollan también una tendencia a permanecer y [illegible] progresar dentro de ese contexto; este anclaje al modelo va en contra de la otra componente, la de la abstracción de las operaciones hacia un nivel sintáctico, la [illegible] supone un rompimiento con la semántica del modelo '*concreto*'.

[illegible]st[illegible] [illegible]alamiento sobre la inte[illegible]cción e[illegible]e las dos componentes básicas [illegible]le[illegible] dependen de la tend[illegible]cia del sujeto, pues aún en casos de tenden[illegible]cia [illegible] el de Mt. se ge[illegible]an, dura[illegible] los procesos de abreviación de [illegible] producción de gr[illegible] intermedias (entre la situación concreta y [illegible] algebrai[illegible]), obs[illegible]ones [illegible] procesos de abstracción de las [illegible] ctua[illegible]s en el mode[illegible] creto[illegible] causa de no contar, en ese pe[illegible], con maneras [illegible] de [illegible]ntar los resultados o estados [illegible] operaciones [illegible] se trata de una deficiencia en la [illegible]nentes de la [illegible].

Las [illegible]cciones antes señal[illegible] constituyen una especie de insuficiencia [illegible], [illegible] sentido de que el [illegible] (de[illegible] al desarrollo espontáneo por parte del [illegible]) al verse fortalecida [illegible] de sus componentes, tiende a ocultar,

precisamente, lo que esencialmente se intenta enseñar, que son *conceptos y operaciones nuevas*.

Esta especie de dialéctica entre los procesos que corresponden a las dos componentes del modelaje, tendría que ser tomada en cuenta por la enseñanza, la cual debiera tratar de desarrollar armoniosamente los dos tipos de procesos, de modo que uno no obstruya al otro y viceversa. En efecto, a partir del análisis de los casos aquí presentados, es claro que esta es una tarea de la enseñanza, dado que ese segundo aspecto del modelaje, el del rompimiento con las nociones y operaciones anteriores, en las que se apoya la introducción de los nuevos conocimientos, es un proceso que consiste en la negación de partes de la semántica del modelo; estas negaciones parciales tienen lugar durante la transferencia del uso del modelo, de una situación de problemas a otra (en el caso del modelo geométrico, se trata de una transferencia de su aplicación de una modalidad de ecuación a otra) pero, cuando esta generalización en el uso del modelo queda a expensas del desarrollo espontáneo por parte del niño, las negaciones parciales pueden darse en partes esenciales del mismo (en el modelo geométrico, se niega la presencia y la operación de la incógnita); es por ello, que se hace necesaria la intervención con enseñanza en el desarrollo de estos procesos de desprendimiento y negación del modelo, a fin de encauzarlos hacia la construcción de las nuevas nociones.

El traslado de la problemática semántica versus sintaxis algebraica a un nivel de acciones del modelaje, permite cerrar distancias entre la enseñanza y dicha problemática, ya que, mediante el análisis de esta interacción a este otro nivel, quedan al descubierto fenómenos didácticos, que señalan como necesaria la intervención de la enseñanza en momentos claves de los procesos que se desencadenan en los inicios de la adquisición del lenguaje algebraico.

Hans, F., "El método" y "Fracciones", en *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas*, Luis Puig (trad., notas e introducción), México, Departamento de Matemática Educativa-Cinvestav-IPN, 1983, pp. 1-6 y 7-54.

EL MÉTODO

2.1. *Aspectos de la fenomenología*

Empecé con un ejemplo para usarlo como tema concreto al que puedo recurrir al explicar mi método. Elegí "longitud" porque es, a la vez, un tema rico y relativamente fácil.

En primer lugar, ¿qué indico con los términos "fenomenología" y "fenomenología didáctica"? Desde luego no me refiero a "fenomenología" en el sentido que puede ser extraído de los trabajos de Hegel, Husserl, y Heidegger*. Aunque la interpretación más clara que puedo imaginar es la que aparece usando el ejemplo del capítulo 1, lo que seguiré haciendo con otros ejemplos en los siguientes capítulos, sin embargo merece la pena intentar dar algo similar a una definición.

Comienzo con la antítesis —si realmente es una antítesis— entre *noumenon* (objeto de pensamiento) y *phainomenon*. Los objetos matemáticos son *noumena*, pero un trozo de matemáticas puede ser experimentado como un *phainomenon;* los números son *noumena*, pero trabajar con números puede ser un *phainomenon*.

Los conceptos, estructuras e ideas matemáticas sirven para organizar los fenómenos —fenómenos tanto del mundo real como de las matemáticas— asunto que he ilustrado en el pasado con muchos ejemplos**. Por medio de las figuras geométricas, como triángulo, paralelogramo, rombo o cuadrado, uno tiene éxito organizando el mundo de los fenómenos de los contornos; los números organizan el fenómeno de la cantidad. En un nivel superior el fenómeno de la figura geométrica se organiza mediante las construcciones y demostraciones geométricas, el fenómeno "número" se organiza mediante el sistema decimal. Así, se va subiendo en matemáticas hasta los más altos niveles: una abstracción continuada da un aspecto similar a los fenómenos matemáticos bajo un concepto —grupo, cuerpo, espacio topológico, deducción, inducción, etc.

La fenomenología de un concepto matemático, de una estructura matemática o una idea matemática significa, en mi terminología, describir este *noumenon* en su relación con los *phainomena* para los cuales es el medio de organización, indicando cuáles son los *phainomena* para cuya organización fue creado y a cuáles puede ser extendido, de qué manera actúa sobre esos fenómenos como medio de organización y de qué poder nos dota sobre esos fenómenos. Si en esta relación entre *noumenon* y *phainomenon* subrayo el elemento didáctico, esto es, si presto atención a cómo se adquiere tal relación en un proceso de enseñanza-aprendizaje, hablo de la fenomenología *didáctica* de ese *noumenon*. Si reemplazara "proceso de enseñanza-aprendizaje" por "crecimiento cognitivo",

* ¿Puede deberse a un mero accidente que los nombres de los fabricantes más pretenciosos de cháchara ininteligible de la filosofía alemana —incluido Habermas— empiecen por H?

** *Mathematics as an Educational Task*, en particular capítulos II y XVII.

sería fenomenología *genética*, y si es ... en un proceso de enseñanza- [illegible] "zaje" se reemplaza por "fue en la historia" es fenomenología *histórica*. [illegible]npre estoy interesado por la fenomenología de los noumena mate[illegible] [illegible]nque la terminología puede ser ampliada a otras clases de noumena.

2.2. *El papel que desempeñan los ejemplos*

El ejemplo de fenomenología con que comienza el capítulo 1 era, claramente, una relación construida *a posteriori* entre el concepto matemático de longitud y el mundo de los objetos de los que se puede predicar la longitud, estructurado mediante la operación de composicion, ⊕. La longitud se interpretó en ese mundo como una función. No analicé cómo llegué a esa función. Aunque esto era indispensable, lo omití porque tenía que abordar esa cuestión en la sección de fenomenológica didáctica y quería evitar repeticiones. Pero, como consecuencia, la sección de fenomenología didáctica contiene ejemplos de pura fenomenología, tales como la sección 1.15 sobre las aplicaciones de congruencia y las secciones 1.18—19 sobre flexiones. De la misma manera, en lo que sigue no separaré con nitidez fenomenología y fenomenología didáctica una de otra. Como he prometido en el prefacio, no voy a sacrificar la legibilidad a la sistematicidad.

¿Dónde busqué el material requerido para mi fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas? Apenas pude apoyarme en los trabajos de otros. He aprovechado mis conocimientos de matemáticas, sus aplicaciones y su historia. Sé cómo han nacido las ideas matematicas o cómo podrían haber nacido. De un análisis de los libros de texto, sé de qué manera juzgan los didactas que pueden apoyar el desarrollo de tales ideas en las mentes de los estudiantes. Finalmente, por la observación de los procesos de aprendizaje, he logrado aprender un poco sobre los procesos reales de la constitución de estructuras matemáticas y la adquisición de conceptos matemáticos. Un poco —esto no promete mucho y desde el punto de vista de la cantidad no es mucho, desde luego, lo que yo puedo ofrecer. Ya he contado unos cuantos ejemplos de dichas observaciones y continuaré en la misma línea. No pretendo que en esta o aquella edad, esta o aquella idea se adquiere de esta o aquella manera. Los ejemplos están encaminados más bien a mostrar que se necesitan procesos de aprendizaje para cosas para las que no esperaríamos que se necesitaran tales procesos. En el primer capítulo, mostré a un niño enfrentado repentinamente a la necesidad de diferenciar "grande" según varias dimensiones, a un niño ubicando "lejos" en el contexto de "largo" y aprendiendo acerca de la conexión entre "medio" y "en medio". Voy a añadir otra historia, que ocurrió unas cuantas horas después del evento en el que "medio" y "en medio" estaban unidos uno al otro:

> La hermana (3;3) de Bastian (5;3) rompe piezas de espuma de plástico en trozos pequeños, que ella llama comida. Bastian se pone a hacer lo mismo con ella, toma un trozo rectangular y lo parte poco más o menos en dos mitades, coloca una mitad sobre la otra, las rompe juntas y repite lo mismo con un combinación de tres pisos —la cuarta pieza ya era suficientemente pequeña.

No sé dónde tendría que situar esta observación: si la tendría que clasificar como matemáticas, pongamos geometría, o si pertenece a la conducta cognitiva general. Relato esta observación porque pienso que es una de las más importantes que jamás he hecho porque me dio una lección sobre qué es observar. No sé si la edad de 5;3 es temprana o tardía para esta forma económica de romper; no sé si

con seguridad: que lo que él hizo es importante y merece la pena ser aprendido. [illegible] esto [illegible] que nos demos cuenta de todas las cosas que los niños deben ap[illegible]. Si observo qué ingenia la gente para enseñar a los niños, me siento inclinado a llamarles la atención: no te esfuerces, simplemente mira, está al alcance de tu mano.

¿Por qué la gente no busca tales cosas simples, que merecen tanto la pena ser aprendidas? Porque la mitad de ellos no se preocupa de las cosas que piensan que son tonterías, mientras que los que se preocupan temen parecer tontos si lo muestran. *Weeding and Sowing* está lleno de historias simples como ésas. Las he contado en conferencias. No me preocupa que una gran parte del público interprete mi discurso como senil, con tal que, con mi ejemplo, una pequeña parte del público se anime a hacer lo mismo que yo —esto, claro está, requiere coraje.

2.3. *Enactivo, icónico, simbólico*

Antes usé la tríada de Bruner "enactivo, simbólico, icónico". Bruner* sugirió tres formas de transformar las experiencias en un modelo del mundo: las representaciones enactiva, icónica y simbólica. Y distingue fases de crecimiento cognitivo, que corresponden al predominio de una u otra de ellas.

El esquema de Bruner puede ser útil. Ha sido asumido por otros y su campo de aplicación ha sido extendido, en particular, hacia la adquisición de conceptos en los procesos de aprendizaje, en la que se distinguen fases similares. Más tarde explicaré mis objeciones a la idea de la adquisición de conceptos como tal, aunque no me opondría a la ampliación de la tríada de Bruner a la adquisición de conceptos. En realidad, en el trabajo de Bruner hay un ejemplo que muestra cómo los tres modos de representación pueden ser aplicados a la adquisición de conceptos: *enactivamente* el nudo en hoja de trébol es una cosa que está anudada, *icónicamente* es una figura para ser observada, y *simbólicamente* es algo representado por la palabra "nudo", tanto si está acompañado por una definición más o menos rigurosa, como si no.

Hay una broma harto conocida: preguntar a la gente qué es una escalera de "caracol". Todos reaccionan del mismo modo: hacen subir su dedo índice por una escalera de caracol imaginaria. Por supuesto que, si fuese necesario, serían capaces de dibujarla. ¿Significa eso que están en la fase enactiva o en la icónica? Desde luego que no. Para el concepto en cuestión poseen un símbolo —las palabras "escalera de caracol"— aunque, si hay que producir una *definición*, van a encontrar más o menos dificultad en pasar de la representación enactiva o icónica a la simbólica.

Consideremos el concepto numérico "tres" y el concepto geométrico "recto". Antes de que el niño domine esas palabras, puede tener familiaridad con lo que significan: aplaudiendo con sus manos tres veces y dirigiéndose en línea recta hacia un objetivo, si se le sugiere (fase enactiva); apartando las fichas con tres

---

* *Studies in Cognitive Growth* (Edited by J.S.Bruner), Toward a Theory of Instruction, 1966, pp. 10–11.

getos tres l recta ujada llas cónic omin palab *tr* *cto*) significa que está en la fase simbólica, ya que "tres", como palabra, un símbolo del concepto *tres* (o "recto" lo es para *recto*). Pero también los tres puntos en el dado pueden ser un símbolo: por ejemplo, jugando al juego de la oca. Un niño que cuenta inteligentemente está en la fase simbólica, incluso si ese contar se acompaña con el desplazamiento de las cuentas de un ábaco. Sumar en el ábaco es enactivo sólo momentáneamente. Tras la primera experiencia, se convierte en simbólico, aunque el simbolismo difiere del de los guarismos escritos. Los números romanos son tan simbólicos como los arábigos. Muescas y cuentas para indicar números pertenecían a la fase simbólica, antes incluso de que se inventaran las cifras —son tan simbólicas como los números romanos y arábigos. El cajero del supermercado que escribe en la caja registradora cantidades de dinero no está atareado ni enactiva ni icónicamente. Un niño pequeño que hace palmas con sus manos con alegría expresa sus sentimientos simbólicamente, incluso si aún no puede pronunciar la palabra "alegría". Ya en la guardería, los niños aceptan un dibujo de una posición de baile en el que los bailarines están representados por trazos en vez de por maniquíes. Si las puertas de los servicios de hombres y mujeres se distinguen por placas con figuras de pantalones o faldas, esto no significa que el decorador imaginara que los usuarios se hallan en la fase icónica; lo hizo así porque esta diferencia está simbolizada diferentemente en los cientos de lenguas que la humanidad habla y escribe —además, las mismas placas son ya símbolos.

Con estos ejemplos intento decir que en situaciones de enseñanza-aprendizaje, que son nuestro interés principal, la tríada de Bruner no ayuda demasiado. El dominio de aplicación de Bruner es la psicología de los niños muy pequeños y en ese período pueden ser dotadas de sentido.

2.4—5. *La adquisición de conceptos y la constitución de objetos mentales*

2.4. Me gustaría subrayar otra idea, ya subrayada en mis publicaciones anteriores. Empezaré con un análisis semántico del término "concepto". Si discuto, por ejemplo, el concepto de número de Euclides, Frege, o Bourbaki, intento comprender qué es lo que estos autores tenían en mente cuando utilizaban la palabra "número". Si investigo el concepto de número de una tribu de Papúes, intento informarme de lo que los miembros de esta tribu saben acerca de los números y qué hacen con ellos; por ejemplo, hasta cuánto pueden contar.

Me parece que este doble significado de "concepto" tiene origen alemán. La palabra alemana para concepto es *Begriff*, que, etimológicamente, es una traducción del latín "conceptus" y también de "comprehensio", por lo que puede significar tanto "concepto" como "comprensión (simpatética)". "Zahlbegriff" puede significar entonces dos cosas, concepto de número y comprensión del número; "Raumbegriff", concepto de espacio e intuición geométrica; "Kunstbegriff", concepto de arte y competencia artística.

En realidad, también en otras lenguas "concepto" se deriva de una palabra que significa comprensión (inglés, *to conceive*; francés, *concevoir*[1]), que, sin embargo, no tiene la fuerza que induce a equívoco que tiene la palabra alemana

[1] Y en castellano, *concebir*.

greif lo pu decir sido influe de la na particular la filosofía de las matemáticas— lo que ha creado e significado del concepto de número, del concepto de espacio y, por la vía abierta, del concepto de grupo, del concepto de cuerpo y del concepto de conjunto, etc. En cualquier caso, la confusión ha estado en funcionamiento durante mucho tiempo y ha sido reforzada enormemente por la "matemática moderna" y por una filosofía racionalista* de la enseñanza de las matemáticas (y de otras materias), que de ningún modo está justificada por ninguna fenomenología. Es la filosofía y la didáctica de la adquisición de conceptos, de antigua reputación y renombre, que ha ganado nuevo peso y autoridad en nuestro siglo gracias a nuevas formulaciones. En el método socrático tal como lo ejercía Sócrates en persona, las esquinas afiladas de la adquisición de conceptos habían sido limadas, porque, desde su punto de vista, la adquisición era una re-adquisición, el recuerdo de conceptos perdidos. Pero en la práctica general el doble significado de concepto ha estado funcionando durante mucho tiempo. Lo único que han añadido unos y otros sistemas de aprendizaje estructural ha sido unas bases teóricas y unas formulaciones más o menos ingeniosas. Para tener un cierto X concebido, se enseña, o se intenta enseñar, el concepto de X. Para tener números, grupos, espacios vectoriales, relaciones concebidos, se inculcan los conceptos de número, grupo, espacio vectorial, relación, o, mejor dicho, se intentan inculcar. Es bastante obvio, de hecho, que a las edades en que se intenta, esto no es factible. Por esta razón, entonces, se intenta materializar los conceptos desnudos (en un "embodiment"[2]). Sin embargo, esas concreciones son usualmente falsas: son demasiado bastas para reflejar los rasgos esenciales de los conceptos que tienen que ser "embodied", incluso si, mediante una variedad de "embodiments", uno desea dar cuenta de más de una faceta. Su nivel es demasiado bajo, muy por debajo del concepto que se persigue. Didácticamente esto significa que el carro va delante del caballo: enseñar abstracciones haciéndolas concretas.

Lo que una fenomenología didáctica puede hacer es preparar el enfoque contrario: empezar por esos fenómenos que solicitan ser organizados y, desde tal punto de partida, enseñar al estudiante a manipular esos medios de organización. Se ha de pedir la ayuda de la fenomenología didáctica si se quiere desarrollar planes para llevar a cabo un enfoque de ese estilo. En la fenomenología didáctica de la longitud, números, etc., los fenómenos organizados por longitud, número, etc., se muestran lo más ampliamente posible. Para enseñar grupos, en vez de empezar por el concepto de grupo y andar buscando materiales que hagan concreto ese concepto, se debería buscar primero fenómenos que pudieran compelir al estudiante a constituir el objeto mental que está siendo matematizado *por* el concepto de grupo. Si en una edad dada dichos fenómenos no están a disposición de los alumnos, uno abandona el intento —inútil— de inculcar el concepto de grupo.

* En el sentido de la epistemología de los conceptos a priori del siglo XVIII.

[2] He dejado *embodiment* sin traducir para resaltar aún más las comillas que le pone Freudenthal. La traducción usual al castellano es el barbarismo "concretización" (barbarismo que, además, pierde el cuerpo o la carne que contiene la palabra inglesa y que podría conservarse con las castellanas 'corporeización' o 'encarnación'). Freudenthal hace referencia, entre otros, a Dienes y sus materiales, que pretenden ser conceptos abstractos materializados, a los que se ha *dado cuerpo*.

Para este enfoque contrario he evitado el término *adquisición de conc* intencionadamente. En su lugar hablo de la constitución de los objetos ment lo que, desde mi punto de vista, precede a la adquisición de conceptos, y puede ser altamente efectivo, incluso si no le sigue la adquisición de conceptos. Con respecto a los objetos mentales realizables geométricamente (cuadrado, esfera, paralelas), es obvio que la constitución del objeto mental no depende en modo alguno de la del concepto correspondiente, pero esto es igualmente cierto para aquellos que no son realizables geométricamente, como número, inducción, deducción..., (o que lo son más difícilmente). El lector de esta fenomenología didáctica debe recordar que vemos los *noumena* en primer lugar como objetos mentales y sólo secundariamente como conceptos, y que lo que mostraremos es el material para la constitución de objetos mentales. El hecho de que manipular objetos mentales preceda a hacer los conceptos explícitos me parece más importante que la división de las representaciones en enactivas, icónicas y simbólicas. En cada caso particular, uno debería intentar establecer criterios que habrían de satisfacerse si un objeto tuviera que considerarse como constituido mentalmente. Para "longitud" tales condiciones podrían ser

> integrar y diferenciar mutuamente adjetivos que indican longitud, con "largo, corto",
>
> comparar longitudes mediante aplicaciones de congruencia y flexiones,
>
> medir longitudes mediante múltiplos y fracciones simples de una unidad de medida,
>
> aplicar orden y aditividad a los resultados de medir y
>
> aplicar la transitividad de comparar longitudes.

2.5. En oposición a la adquisición de conceptos mediante "embodiments" concretas he colocado la constitución de objetos mentales basada en la fenomenología. En la primera aproximación, las concreciones tienen un significado transitorio. La división del pastel puede ser olvidada tan pronto como el estudiante domine las fracciones algorítmicamente. En contradicción con esta aproximación, el material que sirve para la constitución mental de fracciones, tiene un valor duradero y definitivo. "Primero los conceptos y después las aplicaciones", como ocurre en la aproximación por adquisición de conceptos, es una estrategia que está virtualmente invertida en la aproximación por constitución de objetos mentales.

157

* Fichsbein los llama *intuiciones*, una palabra que intento evitar porque puede significar tanto visión interna como iluminaciones.

CAPÍTULO 5

FRACCIONES

5.1—2 *El título*

5.1 No es un lapsus —"fracciones" en lugar de "números racionales positivos" en el título del capítulo. Esa terminología parece pasada de moda. Para el punto de vista actual, los objetos propiamente matemáticos de los que se trata aquí son los números racionales. Este punto de vista es correcto, como una consecuencia de cómo el matemático interpreta sus fórmulas. Si a y b son números,

> $a+b$ no es la tarea "añadir b a a",

más bien es un número de nuevo, a saber, la suma de a y b. Si esto se entiende,

> 3+2 es nuevamente un número,

que puede ser escrito "5", más brevemente; aunque, si se prefiere, puede escribirse "$\sqrt{25}$" también, o $\log_{10} 10^5$.

Entonces

> $3+2=5$

no debe ser leído

> si añado 2 a 3, obtengo 5

sino

> 3+2 y 5 son la misma cosa—

también formulado a veces como

> "3+2" y "5" son nombres diferentes de la misma cosa,

tal como, por ejemplo,

> "Amsterdam" y "capital de Holanda"

son nombres de la misma cosa.

A derecha e izquierda del signo igual, aparece el *mismo* objeto. De la misma manera en

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \ldots$$

se habla una y otra vez de la misma cosa, sólo que representada de varias formas, y esa cosa es un *número racional*. Bien, uno puede preferir la forma $\frac{2}{3}$, y, en ge[illegible] para cada número racional, la expresión por medio de una fracción e[illegible] q[illegible]umerador y denominador tienen máximo común divisor 1, la frac[illegible] simplificada; como se prefiere para el número 5 la expresión 5 antes que 3+2, 10-5, etc., aunque las otras son igualmente admisibles. Hay, de todos modos, una diferencia: "5" no es sólo el nombre *preferido* del número 5, es el *primer* nombre, el nombre con el cual me ha sido presentado, y bajo el cual lo conocí, mientras que "3+2" y "10-5" son alias con los cuales lo puedo llamar también. Sin embargo, $\frac{2}{3}$, es sólo el nombre más simple de cierto número racional, e incluso yo no podría decir de muchos números racionales bajo qué nombre los conocí por primera vez. Ésta es la razón, pues, por la que las distintas expresiones fraccionarias del mismo racional viven mucho más sus propias vidas, y por la que se las conoce con un nombre especial: *fracción*.

Pero sea lo que sea lo que uno sienta sobre ello, el objeto matemático que importa es el número racional más que la fracción. No obstante, puse la palabra "fracciones" en el título, y lo hice intencionadamente. Las fracciones son el recurso fenomenológico del número racional – una fuente que nunca se seca. "Fracción" —o lo que le corresponda en otras lenguas— es la palabra con la que entra el número racional, y en todas las lenguas que conozco está relacionada con romper: fractura. "Número racional" evoca asociaciones mucho menos violentas: "racional" está relacionado con "razón", no en el sentido de la razón[1] sino en el de proporción, de medida —un contexto aprendido y mucho más aprendido que "fracción".

5.2 En realidad, las fracciones tienen mucho que ver con razón, y yo dudaba sobre si debería colocar la palabra "Razón" bajo "Capítulo 5". No como un substituto de "Fracciones" sino como tema que merecía prioridad —prioridad por razones didácticas, pero también por la propia exposición. Aplacé "Razón" para el capítulo 6, aunque lo anticipo repetidamente en el presente capítulo. Desde el comienzo, he luchado con problemas de prioridad mientras escribía este libro, y sólo puedo esperar que el daño causado por esta lucha sea soportable. De hecho, le he dado la vuelta al presente capítulo varias veces. La abundancia de fenómenos que se dominan con fracciones y razón es lo que causa el problema. Para escribir una fenomenología tengo que prestar atención a todos estos fenómenos; organizarlos demasiado sistemáticamente puede significar simplificarlos tanto que ponga trabas a la tarea fenomenológica.

No se puede negar que la didáctica de las fracciones está caracterizada por tendencias unificadoras. Por regla general, los números naturales se enfocan desde varias perspectivas. Cuando llega el turno de las fracciones, se supone que los alumnos están lo suficientemente avanzados como para quedarse satisfechos con un único enfoque desde la realidad. Desde mi punto de vista, este supuesto erróneo es la razón por la que las fracciones funcionan mucho peor que los números naturales y por la que mucha gente nunca aprende las fracciones.

[1] En inglés los dos sentidos de la palabra castellana 'razón' se expresan con palabras distintas: *ratio* y *reason*; *rational* viene de *ratio* y no de *reason*. En la jerga castellana de la política y la televisión el barbarismo *ratio* está substituyendo a *razón*, por motivos poco razonables.

Es mi intención presentar las fracciones en su [illegible]ta riqueza fenomenológica —sólo espero no ahogarme en este océano.

5.3 *Las fracciones en el lenguaje cotidiano*

5.3.1 *la mitad de* (por analogía con igual de, el doble de...)

seguido de

..., largo, pesado, viejo,

compara cantidades y valores de magnitudes[2].

Menos usual es

un tercio de, dos tercios de
..., largo, pesado, viejo, ...

5.3.2 *dos y un tercio veces de*[3]

..., largo, pesado, viejo, ...

como si fuera una extensión de

el doble de
..., largo, pesado, viejo, ...*

Pero

un tercio veces de
..., largo, pesado, viejo, ...

a duras penas puede ser considerado como perteneciente al lenguaje cotidiano.

[2] En inglés, estas frases comparativas se forman con *as*: *half as, equally as, twice as*. Yo las he traducido *la mitad de, igual de, el doble de*, porque en castellano se dice "el doble *de* largo" o "igual *de* largo". Esto hace desaparecer la distinción que Freudenthal subraya entre *half as*, que aparece aquí, y el *half of*, que introduce en 5.3.3, ya que ambas expresiones inglesas hay que traducirlas al castellano por "la mitad *de*". Hay sin embargo en castellano otra expresión comparativa que no tiene equivalente en inglés y que habría que tomar en cuenta en un análisis fenomenológico de las fracciones en el lenguaje vernáculo castellano: me refiero a las expresiones con "veces" que utilizan como conectiva "más", como, por ejemplo, "dos veces más largo que". Esta expresión, que es equivalente a "el doble de largo que" y traduce también por tanto la expresión inglesa "twice as long as", es la única que queda disponible cuando se avanza en la serie de los números y dejan de existir los multiplicativos "doble", "triple", etc., y presenta la dificultad de usar la palabra aditiva "más" en una expresión con significado global multiplicativo.

[3] En inglés, *two and a third times as*: he conservado el *de* en la traducción castellana para que pueda verse este subapartado como continuación del anterior. En castellano, las expresiones como esta inglesa se corresponden con las que he indicado en la nota anterior: más que extender "el doble de" como aquí, la expresión que se extiende es "dos veces más largo que" a "dos veces y media más largo que", por ejemplo.

* En muchas otras lenguas podría añadir "pequeño", "corto" y "poco" a esta lista. [Por ejemplo, "pequeño" y "corto" en castellano. (Nota del traductor)]

3 *la mitad de, un tercio de, un cuarto de...*

describe una cantidad o un valor de una magnitud por medio de otra. El artículo indefinido o definido añade matices

...,un (uno[4]), el
mitad de, tercio de, cuarto de...
un el
pastel, camino, viaje, hora, libra, dinero, millón...

Como lo hace

un (uno), el
mitad de, tercio de, cuarto de...
siete
pasteles, horas, libras, millones...

Se pueden formar múltiplos

dos tercios de, tres cuartos de...
un (uno), el
pastel, camino, viaje, hora, dinero, millón...

5.3.4 la mitad de un..., la mitad del

se usa en el mismo sentido.

5.3.5 Del nombre o guarismo al número de medida expresado mediante números

$\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $5\frac{1}{4}$,
m, kg, l, seg, botellas, millones.

5.3.6 Un extraño fenómeno —creo que en todas las lenguas— es

vez o *veces*

tras las fracciones. En la sección 5.3.2 ya nos lo encontramos

...veces de[5]...

"Veces" pertenece a la multiplicación (cf. sección 5.31). Con un número natural m aparece en

hacer, sufrir, experimentar, esperar, m veces

algo, por ejemplo

[4] En inglés puede usarse el artículo indefinido *a* o el adjetivo *one;* en castellano la diferencia se desvanece al perderse la o de uno, pero también existen los femeninos "la" y "una".
[5] En castellano, como ya he indicado en una nota anterior, más a menudo "...veces más ... que...".

coger m veces n canicas ($m \cdot n$ canicas)
llevar m veces una varilla de medida (m veces de largo)
girar m veces la llave en la cerradura,
m veces alrededor del reloj, la pista de carreras, la Tierra,
rodar m veces una rueda,
oscilar m veces adelante y atrás.

En un momento determinado se permite que m sea una fracción. Esta extensión lingüística se entiende más fácilmente si m es un número mixto:

2 veces de largo

lleva a

$2\frac{1}{2}$ veces de largo[6].

$\frac{1}{3}$ veces de largo[7]

parece innatural, pero el número entero en

$2\frac{1}{3}$ veces de largo

sugiere que esto significa

2 veces de largo $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$.

En procesos cíclicos o periódicos de otro tipo

$\frac{1}{2}$ vez, $\frac{1}{3}$ vez, $\frac{2}{3}$ veces $\frac{1}{3}$

pueden ser auto-explicativos sin números enteros. En

$\frac{1}{2}$ vez, rodar $2\frac{1}{2}$ veces la llave en la cerradura,
$\frac{1}{3}$ vez, $2\frac{1}{3}$ veces alrededor del reloj, pista de carreras, Tierra,
$\frac{1}{2}$ vez, oscilar $2\frac{1}{2}$ veces adelante y atrás,
$\frac{1}{3}$ vez, rodar $2\frac{1}{3}$ veces una rueda,

la fracción sugiere una acción cuya última fase ha sido realizada sólo parcialmente. Si esto se aplica a la acción de medir —por ejemplo al uso de una cinta métrica—,

[6] O "dos veces más largo que" a "dos veces y media más largo que".
[7] En castellano, parece aún más innatural extender la expresión "veces más ... que" a una fracción propia, por el choque violento entre una cantidad menor que la unidad como operador multiplicativo y la palabra "más".

$\frac{1}{3}$ veces de largo, $2\frac{1}{3}$ veces de largo

se hace más claro como un proceso de ajustar una herramienta de medida periódicamente, en el que la última fase sólo se realiza parcialmente.

5.3.7 La terminología más natural es

3 veces...
$\frac{1}{3}$ *de...*

y también

$\frac{2}{3}$ *de...*

aplicado a un

número, cantidad de objetos, objeto divisible, valor de una magnitud,

tal como

7, 30 canicas, un pastel, 5 kg,

pero la aritmética y las matemáticas están mejor servidas con un solo término. En casos excepcionales las *veces* se reemplazan por *de*, como en

3 paquetes *de* 5 kg cada uno,

pero éste es un *de* diferente al que sigue a una fracción. En aras de uniformidad y siguiendo una vieja tradición

veces reemplaza a *de*.

En los libros de texto la mayor parte de las veces esto simplemente se prescribe:

$\frac{1}{3}$ *vez* significa $\frac{1}{3}$ *de*.

En lo que precede, esbozábamos vías naturales desde

de a *veces*:

un camino es desde

2 veces

vía

$2\frac{1}{3}$ veces

160

a

$\frac{1}{3}$ vez;

el otro es el proceso cíclico o periódico:

2 veces alrededor del reloj;
$\frac{1}{2}$ vez alrededor del reloj.

Más tarde abordaré nuevamente esta cuestión cuando discutamos la multiplicación de fracciones.

5.3.8. De otro modo

de o *en* , o *entre* , o *por*[8]

sugiere una fracción en

3 de (en, por) cada 5 (gente viviendo en las ciudades),
5 de 100 (5%).
35 millas por galón,
una escala de 1 a 1000,
una oportunidad entre cien, en cien, de cien,
3 de 5 partes,

En una mezcla

3 partes de sal y 2 partes de pimienta.

5.3.9 Una terminología aparentemente más fuerte

cada tercer lote gana
cada quinto hombre es chino.[9]

Parece que éste es el origen de los números ordinales como medio de indicar denominadores de fracciones[10]: contando 1, 2, 3..., 10 para separar el *décimo* ; toda esta "décima" gente u objetos forma juntos un (el) décimo del total. Así, la *décima* parte es de hecho la última de todas ellas. En una terminología obsoleta nueve partes significa 9/10, el resto que se deja si la décima se separa[11]. "Diezmar" significaba originalmente contar décimos y separarlos (para matarlos).

---

[8] Las conectivas inglesas que señala Freudenthal aquí son *of, out of, in* y *to*.
[9] Traducción literal de *every third, every fifth*. En castellano no hay una expresión equivalente, aunque forzando un poco se puede usar ésa en frases como "separa cada tercero" o similares.
[10] La Real Academia de la Lengua Castellana indica explícitamente que se trata de ordinales: "Los números quebrados 1/5, 2/6, 8/10... se expresan lingüísticamente con dos numerales: un cardinal en función adjetiva que designa el numerador del quebrado: *un, dos, ocho*, y un numeral ordinal en función substantiva que designa el denominador: *quinto, sexto, décimo*" (*Esbozo de una nueva gramática de la lengua española*, Espasa Calpe, Madrid, 1986, pg. 245.)
[11] "En español antiguo y clásico se decía también *las dos partes* por *las dos terceras partes*, *las tres partes* por *las tres cuartas partes*, etc., como en el pasaje de Cervantes: *Consumían las tres partes de su hacienda* (*Quijote*, I, 1)." (*Esbozo de una nueva gramática de la lengua española*, Espasa Calpe, Madrid, 1986, pg.246.)

5.4.1 *Causar fracciones*

Ya hemos explicado cómo se dividen las magnitudes, con o sin resto. Para dividir substancias, medidas por magnitudes, hay muchos métodos disponibles: fracturar[12] puede ser

irreversible, o reversible, o meramente simbólico.

La igualdad de partes se estima

a ojo o por tacto,

o por métodos más sofisticados. Uno de ellos es

doblarlo en dos

para partirlo por la mitad,

doblarlo en tres

para dividirlo en tres partes iguales;

doblarlo repetidamente en dos y tres

conduce a más fracciones.

Los objetos pesados se parten por la mitad

pesando las partes en las manos o en una balanza,

mientras se corrige repetidamente la falta de equilibrio. Similarmente

comparar y corregir

desempeña su papel si en general una substancia medida por magnitudes tiene que ser distribuida; por ejemplo, un líquido en un número de vasos congruentes, en los que se compara las alturas del líquido.

Las figuras u objetos planos y espaciales, así como cantidades grandes, se distribuyen a veces con respecto al área o volumen mediante el uso de

congruencias y simetrías;

por ejemplo, el pastel redondo en partes congruentes, que puede dividirse

a ojo o por tacto,

---

[12]La fracción como resultado de fracturar está presente en el nombre tradicional castellano para las fracciones: *quebrados*.

En todos estos ejemplos desatendí la medida correcta. [illegible]día prestar atención a métodos más primitivos. En la constitución mental de todas las clases de magnitudes, repartir en partes equitativas me parece un eslabón importante —más importante que lo que los psicólogos investigan bajo el nombre de conservación. Que yo sepa, los psicólogos del desarrollo no han prestado ninguna atención a este aspecto. He observado muchas veces que de los 7 a los 8 años se es capaz de estimar una mitad o un tercio de un área irregular que hay que colorear; mediante esta habilidad están dominando una componente importante del objeto mental "área", mientras que el conocimiento de la fórmula del área de un rectángulo, como el que exhiben niños entre los 10 y 12 años, no significa necesariamente progreso —por el contrario puede muy bien significar retroceso. Anteriormente subrayé la importancia de las transformaciones de composición y descomposición para el desarrollo de las magnitudes como objetos mentales.

5.4.2. *Todo y parte*

Del modo más concreto las fracciones se presentan si un todo ha sido o está siendo

rajado, cortado, rebanado, roto, coloreado,

en partes iguales, o si se

experimenta, imagina, piensa

como si lo fuera. En este complejo de fenómenos voy a intentar una clasificación, ilustrada con ejemplos.

El todo puede ser

discreto	o continuo,
definido	o indefinido,
estructurado	o carente de estructura,

lo que quieren ser calificaciones extremas con una variedad de transiciones entre ellas.

La atención puede ser dirigida a

una parte, un número de partes, todas las partes.

Las partes pueden estar

conectadas o desconectadas.

El modo de dividir puede ser

estructurado o no estructurado.

obje... con tres líneas rectas dibujadas ... llas (... icónico, ... domin... palabra *tres* ... *recto*) significa que está en la fase simbólica, ya que "tres", como palabra, es un símbolo del concepto *tres* (o "recto" lo es para *recto*). Pero también los tres puntos en el dado pueden ser un símbolo: por ejemplo, jugando al juego de la oca. Un niño que cuenta inteligentemente está en la fase simbólica, incluso si ese contar se acompaña con el desplazamiento de las cuentas de un ábaco. Sumar en el ábaco es enactivo sólo momentáneamente. Tras la primera experiencia, se convierte en simbólico, aunque el simbolismo difiere del de los guarismos escritos. Los números romanos son tan simbólicos como los arábigos. Muescas y cuentas para indicar números pertenecían a la fase simbólica, antes incluso de que se inventaran las cifras —son tan simbólicas como los números romanos y arábigos. El cajero del supermercado que escribe en la caja registradora cantidades de dinero no está atareado ni enactiva ni icónicamente. Un niño pequeño que hace palmas con sus manos con alegría expresa sus sentimientos simbólicamente, incluso si aún no puede pronunciar la palabra "alegría". Ya en la guardería, los niños aceptan un dibujo de una posición de baile en el que los bailarines están representados por trazos en vez de por maniquíes. Si las puertas de los servicios de hombres y mujeres se distinguen por placas con figuras de pantalones o faldas, esto no significa que el decorador imaginara que los usuarios se hallan en la fase icónica; lo hizo así porque esta diferencia está simbolizada diferentemente en los cientos de lenguas que la humanidad habla y escribe —además, las mismas placas son ya símbolos.

Con estos ejemplos intento decir que en situaciones de enseñanza-aprendizaje, que son nuestro interés principal, la tríada de Bruner no ayuda demasiado. El dominio de aplicación de Bruner es la psicología de los niños muy pequeños y en ese período pueden ser dotadas de sentido.

2.4—5. *La adquisición de conceptos y la constitución de objetos mentales*

2.4. Me gustaría subrayar otra idea, ya subrayada en mis publicaciones anteriores. Empezaré con un análisis semántico del término "concepto". Si discuto, por ejemplo, el concepto de número de Euclides, Frege, o Bourbaki, intento comprender qué es lo que estos autores tenían en mente cuando utilizaban la palabra "número". Si investigo el concepto de número de una tribu de Papúes, intento informarme de lo que los miembros de esta tribu saben acerca de los números y qué hacen con ellos; por ejemplo, hasta cuánto pueden contar.

Me parece que este doble significado de "concepto" tiene origen alemán. La palabra alemana para concepto es *Begriff*, que, etimológicamente, es una traducción del latín "conceptus" y también de "comprehensio", por lo que puede significar tanto "concepto" como "comprensión (simpatética)". "Zahlbegriff" puede significar entonces dos cosas, concepto de número y comprensión del número; "Raumbegriff", concepto de espacio e intuición geométrica; "Kunstbegriff", concepto de arte y competencia artística.

En realidad, también en otras lenguas "concepto" se deriva de una palabra que significa comprensión (inglés, *to conceive*; francés, *concevoir*[1]), que, sin embargo, no tiene la fuerza que induce a equívoco que tiene la palabra alemana

[1]Y en castellano, *concebir*.

Begriff ... lo p... decir ... sido ... influencia de la filosofía alemana —en particular la filosofía de las matemáticas— lo que ha creado ... significado del concepto de número, del concepto de espacio y, por la vía ab..., del concepto de grupo, del concepto de cuerpo y del concepto de conjunto, etc. En cualquier caso, la confusión ha estado en funcionamiento durante mucho tiempo y ha sido reforzada enormemente por la "matemática moderna" y por una filosofía racionalista* de la enseñanza de las matemáticas (y de otras materias), que de ningún modo está justificada por ninguna fenomenología. Es la filosofía y la didáctica de la adquisición de conceptos, de antigua reputación y renombre, que ha ganado nuevo peso y autoridad en nuestro siglo gracias a nuevas formulaciones. En el método socrático tal como lo ejercía Sócrates en persona, las esquinas afiladas de la adquisición de conceptos habían sido limadas, porque, desde su punto de vista, la adquisición era una re-adquisición, el recuerdo de conceptos perdidos. Pero en la práctica general el doble significado de concepto ha estado funcionando durante mucho tiempo. Lo único que han añadido unos y otros sistemas de aprendizaje estructural ha sido unas bases teóricas y unas formulaciones más o menos ingeniosas. Para tener un cierto X concebido, se enseña, o se intenta enseñar, el concepto de X. Para tener números, grupos, espacios vectoriales, relaciones concebidos, se inculcan los conceptos de número, grupo, espacio vectorial, relación, o, mejor dicho, se intentan inculcar. Es bastante obvio, de hecho, que a las edades en que se intenta, esto no es factible. Por esta razón, entonces, se intenta materializar los conceptos desnudos (en un "embodiment"[2]). Sin embargo, esas concreciones son usualmente falsas: son demasiado bastas para reflejar los rasgos esenciales de los conceptos que tienen que ser "embodied", incluso si, mediante una variedad de "embodiments", uno desea dar cuenta de más de una faceta. Su nivel es demasiado bajo, muy por debajo del concepto que se persigue. Didácticamente esto significa que el carro va delante del caballo: enseñar abstracciones haciéndolas concretas.

Lo que una fenomenología didáctica puede hacer es preparar el enfoque contrario: empezar por esos fenómenos que solicitan ser organizados y, desde tal punto de partida, enseñar al estudiante a manipular esos medios de organización. Se ha de pedir la ayuda de la fenomenología didáctica si se quiere desarrollar planes para llevar a cabo un enfoque de ese estilo. En la fenomenología didáctica de la longitud, números, etc., los fenómenos organizados por longitud, número, etc., se muestran lo más ampliamente posible. Para enseñar grupos, en vez de empezar por el concepto de grupo y andar buscando materiales que hagan concreto ese concepto, se debería buscar primero fenómenos que pudieran compelir al estudiante a constituir el objeto mental que está siendo matematizado *por* el concepto de grupo. Si en una edad dada dichos fenómenos no están a disposición de los alumnos, uno abandona el intento —inútil— de inculcar el concepto de grupo.

* En el sentido de la epistemología de los conceptos a priori del siglo XVIII.
[2]He dejado *embodiment* sin traducir para resaltar aún más las comillas que le pone Freudenthal. La traducción usual al castellano es el barbarismo "concretización" (barbarismo que, además, pierde el cuerpo o la carne que contiene la palabra inglesa y que podría conservarse con las castellanas 'corporeización' o 'encarnación'). Freudenthal hace referencia, entre otros, a Dienes y sus materiales, que pretenden ser conceptos abstractos materializados, a los que se ha *dado cuerpo*.

[illegible] este enfoque contrario he evitado el término *adquisición [illegible] concep-* intencionadamente. En su lugar hablo de la constitución de los objetos mentales, lo que, desde mi punto de vista, precede a la adquisición de conceptos, y puede ser altamente efectivo, incluso si no le sigue la adquisición de conceptos. Con respecto a los objetos mentales realizables geométricamente (cuadrado, esfera, paralelas), es obvio que la constitución del objeto mental no depende en modo alguno de la del concepto correspondiente, pero esto es igualmente cierto para aquellos que no son realizables geométricamente, como número, inducción, deducción..., (o que lo son más difícilmente). El lector de esta fenomenología didáctica debe recordar que vemos los *noumena* en primer lugar como objetos mentales y sólo secundariamente como conceptos, y que lo que mostraremos es el material para la constitución de objetos mentales. El hecho de que manipular objetos mentales preceda a hacer los conceptos explícitos me parece más importante que la división de las representaciones en enactivas, icónicas y simbólicas. En cada caso particular, uno debería intentar establecer criterios que habrían de satisfacerse si un objeto tuviera que considerarse como constituido mentalmente. Para "longitud" tales condiciones podrían ser

> integrar y diferenciar mutuamente adjetivos que indican longitud, con "largo, corto",
>
> comparar longitudes mediante aplicaciones de congruencia y flexiones,
>
> medir longitudes mediante múltiplos y fracciones simples de una unidad de medida,
>
> aplicar orden y aditividad a los resultados de medir y
>
> aplicar la transitividad de comparar longitudes.

2.5. En oposición a la adquisición de conceptos mediante "embodiments" concretas he colocado la constitución de objetos mentales basada en la fenomenología. En la primera aproximación, las concreciones tienen un significado transitorio. La división del pastel puede ser olvidada tan pronto como el estudiante domine las fracciones algorítmicamente. En contradicción con esta aproximación, el material que sirve para la constitución mental de fracciones, tiene un valor duradero y definitivo. "Primero los conceptos y después las aplicaciones", como ocurre en la aproximación por adquisición de conceptos, es una estrategia que está virtualmente invertida en la aproximación por constitución de objetos mentales.

---

* Fichsbein los llama *intuiciones*, una palabra que intento evitar porque puede significar tanto visión interna como iluminaciones.

CAPÍTULO 5

FRACCIONES

5.1—2 *El título*

5.1 No es un lapsus —"fracciones" en lugar de "números racionales positivos" en el título del capítulo. Esa terminología parece pasada de moda. Para el punto de vista actual, los objetos propiamente matemáticos de los que se trata aquí son los números racionales. Este punto de vista es correcto, como una consecuencia de cómo el matemático interpreta sus fórmulas. Si a y b son números,

> $a+b$ no es la tarea "añadir b a a",

más bien es un número de nuevo, a saber, la suma de a y b. Si esto se entiende,

> $3+2$ es nuevamente un número,

que puede ser escrito "5", más brevemente; aunque, si se prefiere, puede escribirse "$\sqrt{25}$" también, o $\log_{10} 10^5$.

Entonces

> $3+2=5$

no debe ser leído

> si añado 2 a 3, obtengo 5

sino

> $3+2$ y 5 son la misma cosa—

también formulado a veces como

> "3+2" y "5" son nombres diferentes de la misma cosa,

tal como, por ejemplo,

> "Amsterdam" y "capital de Holanda"

son nombres de la misma cosa.

A derecha e izquierda del signo igual, aparece el *mismo* objeto. De la misma manera en

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \ldots$$

se habla una y otra vez de la misma cosa, sólo que representada de varias formas, y esa cosa es un *número racional*. Bien, uno puede preferir la forma $\frac{2}{3}$, y, en gen[illegible] para cada [illegible] ro ra[illegible] 1, la [illegible] sión [illegible] redic[illegible] na fr[illegible] en que [illegible]erador y denominador tienen máximo común divisor 1, la fracción simplificada; como se prefiere para el número 5 la expresión 5 antes que 3+2, 10-5, etc., aunque las otras son igualmente admisibles. Hay, de todos modos, una diferencia: "5" no es sólo el nombre *preferido* del número 5, es el *primer* nombre, el nombre con el cual me ha sido presentado, y bajo el cual lo conocí, mientras que "3+2" y "10-5" son alias con los cuales lo puedo llamar también. Sin embargo, $\frac{2}{3}$, es sólo el nombre más simple de cierto número racional, e incluso yo no podría decir de muchos números racionales bajo qué nombre los conocí por primera vez. Ésta es la razón, pues, por la que las distintas expresiones fraccionarias del mismo racional viven mucho más sus propias vidas, y por la que se las conoce con un nombre especial: *fracción*.

Pero sea lo que sea lo que uno sienta sobre ello, el objeto matemático que importa es el número racional más que la fracción. No obstante, puse la palabra "fracciones" en el título, y lo hice intencionadamente. Las fracciones son el recurso fenomenológico del número racional – una fuente que nunca se seca. "Fracción" —o lo que le corresponda en otras lenguas— es la palabra con la que entra el número racional, y en todas las lenguas que conozco está relacionada con romper: fractura. "Número racional" evoca asociaciones mucho menos violentas: "racional" está relacionado con "razón", no en el sentido de la razón[1] sino en el de proporción, de medida —un contexto aprendido y mucho más aprendido que "fracción".

5.2 En realidad, las fracciones tienen mucho que ver con razón, y yo dudaba sobre si debería colocar la palabra "Razón" bajo "Capítulo 5". No como un substituto de "Fracciones" sino como tema que merecía prioridad —prioridad por razones didácticas, pero también por la propia exposición. Aplacé "Razón" para el capítulo 6, aunque lo anticipo repetidamente en el presente capítulo. Desde el comienzo, he luchado con problemas de prioridad mientras escribía este libro, y sólo puedo esperar que el daño causado por esta lucha sea soportable. De hecho, le he dado la vuelta al presente capítulo varias veces. La abundancia de fenómenos que se dominan con fracciones y razón es lo que causa el problema. Para escribir una fenomenología tengo que prestar atención a todos estos fenómenos; organizarlos demasiado sistemáticamente puede significar simplificarlos tanto que ponga trabas a la tarea fenomenológica.

No se puede negar que la didáctica de las fracciones está caracterizada por tendencias unificadoras. Por regla general, los números naturales se enfocan desde varias perspectivas. Cuando llega el turno de las fracciones, se supone que los alumnos están lo suficientemente avanzados como para quedarse satisfechos con un único enfoque desde la realidad. Desde mi punto de vista, este supuesto erróneo es la razón por la que las fracciones funcionan mucho peor que los números naturales y por la que mucha gente nunca aprende las fracciones.

[1] En inglés los dos sentidos de la palabra castellana 'razón' se expresan con palabras distintas: *ratio* y *reason*; *rational* viene de *ratio* y no de *reason*. En la jerga castellana de la política y la televisión el barbarismo *ratio* está substituyendo a *razón*, por motivos poco razonables.

Es mi intención presentar las fracciones en su c[illegible]leta riqueza fenomenológica [illegible] espe[illegible] aho[illegible] en [illegible]céan[illegible]

5.3 *Las fracciones en el lenguaje cotidiano*

5.3.1 *la mitad de* (por analogía con igual de, el doble de...)

seguido de

..., largo, pesado, viejo,

compara cantidades y valores de magnitudes[2].

Menos usual es

un tercio de, dos tercios de
..., largo, pesado, viejo, ...

5.3.2 *dos y un tercio veces de*[3]

..., largo, pesado, viejo, ...

como si fuera una extensión de

el doble de
..., largo, pesado, viejo, ...*

Pero

un tercio veces de
..., largo, pesado, viejo, ...

a duras penas puede ser considerado como perteneciente al lenguaje cotidiano.

[2] En inglés, estas frases comparativas se forman con *as*: *half as, equally as, twice as*. Yo las he traducido *la mitad de, igual de, el doble de*, porque en castellano se dice "el doble *de* largo" o "igual *de* largo". Esto hace desaparecer la distinción que Freudenthal subraya entre *half as*, que aparece aquí, y el *half of*, que introduce en 5.3.3, ya que ambas expresiones inglesas hay que traducirlas al castellano por "la mitad *de*". Hay sin embargo en castellano otra expresión comparativa que no tiene equivalente en inglés y que habría que tomar en cuenta en un análisis fenomenológico de las fracciones en el lenguaje vernáculo castellano: me refiero a las expresiones con "veces" que utilizan como conectiva "más", como, por ejemplo, "dos veces más largo que". Esta expresión, que es equivalente a "el doble de largo que" y traduce también por tanto la expresión inglesa "twice as long as", es la única que queda disponible cuando se avanza en la serie de los números y dejan de existir los multiplicativos "doble", "triple", etc., y presenta la dificultad de usar la palabra aditiva "más" en una expresión con significado global multiplicativo.

[3] En inglés, *two and a third times as*: he conservado el *de* en la traducción castellana para que pueda verse este subapartado como continuación del anterior. En castellano, las expresiones como esta inglesa se corresponden con las que he indicado en la nota anterior: más que extender "el doble de" como aquí, la expresión que se extiende es "dos veces más largo que" a "dos veces y media más largo que", por ejemplo.

* En muchas otras lenguas podría añadir "pequeño", "corto" y "poco" a esta lista. [Por ejemplo, "pequeño" y "corto" en castellano. (Nota del traductor)]

5.3.3 *la mitad de, un tercio de, un cuarto de...*

describe una cantidad o un valor de una magnitud por medio de otra. El artículo indefinido o definido añade matices

...,un (uno[4]), el
mitad de, tercio de, cuarto de...
un el
pastel, camino, viaje, hora, libra, dinero, millón...

Como lo hace

un (uno), el
mitad de, tercio de, cuarto de...
siete
pasteles, horas, libras, millones...

Se pueden formar múltiplos

dos tercios de, tres cuartos de...
un (uno), el
pastel, camino, viaje, hora, dinero, millón...

5.3.4 la mitad de un..., la mitad del

se usa en el mismo sentido.

5.3.5 Del nombre o guarismo al número de medida expresado mediante números

$\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $5\frac{1}{4}$,
m, kg, l, seg, botellas, millones.

5.3.6 Un extraño fenómeno —creo que en todas las lenguas— es

vez o *veces*

tras las fracciones. En la sección 5.3.2 ya nos lo encontramos

...veces de[5]...

"Veces" pertenece a la multiplicación (cf. sección 5.31). Con un número natural m aparece en

hacer, sufrir, experimentar, esperar, m veces

algo, por ejemplo

[4] En inglés puede usarse el artículo indefinido *a* o el adjetivo *one;* en castellano la diferencia se desvanece al perderse la o de uno, pero también existen los femeninos "la" y "una".
[5]En castellano, como ya he indicado en una nota anterior, más a menudo "...veces más ... que...".

coger m veces n canicas ($m \cdot n$ canicas)
llevar m veces una varilla de medida (m veces de largo)
girar m veces la llave en la cerradura,
m veces alrededor del reloj, la pista de carreras, la Tierra,
rodar m veces una rueda,
oscilar m veces adelante y atrás.

En un momento determinado se permite que m sea una fracción. Esta extensión lingüística se entiende más fácilmente si m es un número mixto:

2 veces de largo

lleva a

$2\frac{1}{2}$ veces de largo[6].

$\frac{1}{3}$ veces de largo[7]

parece innatural, pero el número entero en

$2\frac{1}{3}$ veces de largo

sugiere que esto significa

2 veces de largo $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$.

En procesos cíclicos o periódicos de otro tipo

$\frac{1}{2}$ vez, $\frac{1}{3}$ vez, $\frac{2}{3}$ veces $\frac{1}{3}$

pueden ser auto-explicativos sin números enteros. En

$\frac{1}{2}$ vez, rodar $2\frac{1}{2}$ veces la llave en la cerradura,
$\frac{1}{3}$ vez, $2\frac{1}{3}$ veces alrededor del reloj, pista de carreras, Tierra,
$\frac{1}{2}$ vez, oscilar $2\frac{1}{2}$ veces adelante y atrás,
$\frac{1}{3}$ vez, rodar $2\frac{1}{3}$ veces una rueda,

la fracción sugiere una acción cuya última fase ha sido realizada sólo parcialmente. Si esto se aplica a la acción de medir —por ejemplo al uso de una cinta métrica—,

[6]O "dos veces más largo que" a "dos veces y media más largo que".
[7]En castellano, parece aún más innatural extender la expresión "veces más ... que" a una fracción propia, por el choque violento entre una cantidad menor que la unidad como operador multiplicativo y la palabra "más".

$\frac{1}{3}$ veces de largo, $2\frac{1}{3}$ veces de largo

se hace más claro como un proceso de ajustar una herramienta de medida periódicamente, en el que la última fase sólo se realiza parcialmente.

5.3.7 La terminología más natural es

3 *veces...*
$\frac{1}{3}$ *de...*

y también

$\frac{2}{3}$ *de...*

aplicado a un

número, cantidad de objetos, objeto divisible, valor de una magnitud,

tal como

7, 30 canicas, un pastel, 5 kg,

pero la aritmética y las matemáticas están mejor servidas con un solo término. En casos excepcionales las *veces* se reemplazan por *de*, como en

3 paquetes *de* 5 kg cada uno,

pero éste es un *de* diferente al que sigue a una fracción. En aras de uniformidad y siguiendo una vieja tradición

veces reemplaza a *de*.

En los libros de texto la mayor parte de las veces esto simplemente se prescribe:

$\frac{1}{3}$ *vez* significa $\frac{1}{3}$ *de*.

En lo que precede, esbozábamos vías naturales desde

de a *veces*:

un camino es desde

2 veces

vía

$2\frac{1}{3}$ veces

a

$\frac{1}{3}$ vez;

el otro es el proceso cíclico o periódico:

2 veces alrededor del reloj;
$\frac{1}{2}$ vez alrededor del reloj.

Más tarde abordaré nuevamente esta cuestión cuando discutamos la multiplicación de fracciones.

5.3.8. De otro modo

de o *en*, o *entre*, o *por*[8]

sugiere una fracción en

3 de (en, por) cada 5 (gente viviendo en las ciudades),
5 de 100 (5%).
35 millas por galón,
una escala de 1 a 1000,
una oportunidad entre cien, en cien, de cien,
3 de 5 partes,

En una mezcla

3 partes de sal y 2 partes de pimienta.

5.3.9 Una terminología aparentemente más fuerte

cada tercer lote gana
cada quinto hombre es chino.[9]

Parece que éste es el origen de los números ordinales como medio de indicar denominadores de fracciones[10]: contando 1, 2, 3..., 10 para separar el *décimo* ; toda esta "décima" gente u objetos forma juntos un (el) décimo del total. Así, la *décima* parte es de hecho la última de todas ellas. En una terminología obsoleta nueve partes significa 9/10, el resto que se deja si la décima se separa[11]. "Diezmar" significaba originalmente contar décimos y separarlos (para matarlos).

---

[8] Las conectivas inglesas que señala Freudenthal aquí son *of*, *out of*, *in* y *to*.

[9] Traducción literal de *every third*, *every fifth*. En castellano no hay una expresión equivalente, aunque forzando un poco se puede usar ésa en frases como "separa cada tercero" o similares.

[10] La Real Academia de la Lengua Castellana indica explícitamente que se trata de ordinales: "Los números quebrados 1/5, 2/6, 8/10... se expresan lingüísticamente con dos numerales: un cardinal en función adjetiva que designa el numerador del quebrado: *un, dos, ocho*, y un numeral ordinal en función substantiva que designa el denominador: *quinto, sexto, décimo*" (*Esbozo de una nueva gramática de la lengua española*, Espasa Calpe, Madrid, 1986, pg. 245)

[11] "En español antiguo y clásico se decía también *las dos partes* por *las dos terceras partes*, *las tres partes* por *las tres cuartas partes*, etc., como en el pasaje de Cervantes: *Consumían las tres partes de su hacienda* (*Quijote*, I, 1)." (*Esbozo de una nueva gramática de la lengua española*, Espasa Calpe, Madrid, 1986, pg.246.)

5.4.1 *Causar fracciones*

Ya hemos explicado cómo se dividen las magnitudes, con o sin resto. Para dividir substancias, medidas por magnitudes, hay muchos métodos disponibles: fracturar[12] puede ser

irreversible, o reversible, o meramente simbólico.

La igualdad de partes se estima

a ojo o por tacto,

o por métodos más sofisticados. Uno de ellos es

doblarlo en dos

para partirlo por la mitad,

doblarlo en tres

para dividirlo en tres partes iguales;

doblarlo repetidamente en dos y tres

conduce a más fracciones.

Los objetos pesados se parten por la mitad

pesando las partes en las manos o en una balanza,

mientras se corrige repetidamente la falta de equilibrio. Similarmente

comparar y corregir

desempeña su papel si en general una substancia medida por magnitudes tiene que ser distribuida; por ejemplo, un líquido en un número de vasos congruentes, en los que se compara las alturas del líquido.

Las figuras u objetos planos y espaciales, así como cantidades grandes, se distribuyen a veces con respecto al área o volumen mediante el uso de

congruencias y simetrías;

por ejemplo, el pastel redondo en partes congruentes, que puede dividirse

a ojo o por tacto,

[12] La fracción como resultado de fracturar está presente en el nombre tradicional castellano para las fracciones: *quebrados*.

En todos estos ejemplos desatendí la medida correcta, para prestar atención a métodos más primitivos. En la constitución mental de todas las clases de magnitudes, repartir en partes equitativas me parece un eslabón importante —más importante que lo que los psicólogos investigan bajo el nombre de conservación. Que yo sepa, los psicólogos del desarrollo no han prestado ninguna atención a este aspecto. He observado muchas veces que de los 7 a los 8 años se es capaz de estimar una mitad o un tercio de un área irregular que hay que colorear; mediante esta habilidad están dominando una componente importante del objeto mental "área", mientras que el conocimiento de la fórmula del área de un rectángulo, como el que exhiben niños entre los 10 y 12 años, no significa necesariamente progreso —por el contrario puede muy bien significar retroceso. Anteriormente subrayé la importancia de las transformaciones de composición y descomposición para el desarrollo de las magnitudes como objetos mentales.

5.4.2. *Todo y parte*

Del modo más concreto las fracciones se presentan si un todo ha sido o está siendo

rajado, cortado, rebanado, roto, coloreado,

en partes iguales, o si se

experimenta, imagina, piensa

como si lo fuera. En este complejo de fenómenos voy a intentar una clasificación, ilustrada con ejemplos.

El todo puede ser

discreto	o continuo,
definido	o indefinido,
estructurado	o carente de estructura,

lo que quieren ser calificaciones extremas con una variedad de transiciones entre ellas.

La atención puede ser dirigida a

una parte, un número de partes, todas las partes.

Las partes pueden estar

conectadas o desconectadas.

El modo de dividir puede ser

estructurado o no estructurado.

5.4.3. [illegible]mplos —*Todo definido (figuras 26—32)*

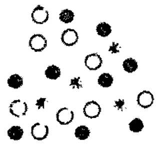


Fig. 26.

Fig. 27.

Fig. 28.

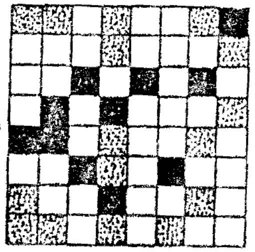


Fig. 29.

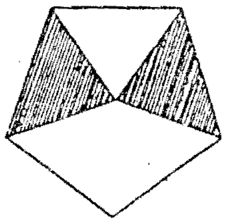


Fig. 30.

De una bolsa de canicas —todo definido discreto—, he sacado una décima parte; mi atención está fijada en esa décima parte, y quizás también en los restantes nueve décimos.

De [illegible] mismo, [illegible] frente a mí, quietas o rodando, estructuradas como una secuencia, tome arbitrariamente una [illegible] —una elección no estructurada— o la primera décima parte o una de [illegible] diez —una elección estructurada.

De las 60 cuentas que hay en un bol, 1/6 son rojas, 1/3 blancas, 1/2 azules —un todo definido discreto, estructurado de acuerdo con el color, no estructurado en el espacio. Lo mismo con un collar —estructurado como un todo, y, si las cuentas se suceden regularmente, 1 roja, 2 blancas, 3 azules, también estructurado respecto a una distribución.

Una tarjeta de bingo —todo definido discreto, estructurado mediante numeración— la atención se fija en las partes que ganan premios.

Una tira —continua, de longitud definida, con estructura lineal— con uno o más segmentos coloreados, pongamos, rojo-blanco-azul —partes conectadas, o desconectadas— aquí y allá unas motas rojas, blancas, azules —dividida con o sin estructura.

Lo mismo con un disco circular —continuo, definido, estructurado cíclicamente, dividido en sectores, que separadamente o tomados juntos representan partes (ruleta, *spinner*, diagrama de sectores).

Lo mismo ocurre con figuras geométricas más o menos estructuradas:

Un cuadrado con o sin una estructura de papel cuadriculado subyacente, o un polígono regular o irregular con o sin una estructura de retícula subyacente, dividido regular o irregularmente.

Las aristas o caras de un cubo, combinadas en cuadruplos y pares paralelos, respectivamente.

Dominios planos limitados por una curva, o dominios espaciales limitados por superficies curvas, regulares o irregulares, divididas de varias formas.

5.4.4. *Ejemplos—Todo indefinido (Figuras 33-34)*

La humanidad —todo indefinido discreto— dividida de acuerdo con los grupos sanguíneos, donde la atención se presta a uno o más de ellos; el todo puede ser tomado, además, como no estructurado, o como estructurado de acuerdo con el sexo, la raza, la distribución geográfica, etc.

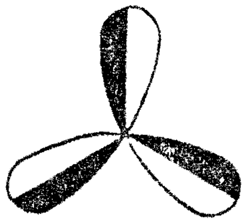


Fig. 31.

[illegible] inov[illegible]s[13] [illegible]ron [illegible]vel [illegible] erad[illegible] fracc[illegible]os c[illegible] l[illegible]s a los operadores multiplicativos. Esto podría haber sido un progreso, no fuera porque incluso ellos se sienten satisfechos con una base de orientación demasiado pequeña.

Los alumnos con el don de digerir algoritmos aprenden a operar con fracciones de todos modos, los alumnos menos o nada dotados en este sentido específico lo aprenden por ensayo y error o no lo aprenden en absoluto. Después de uno o dos años de fracciones, algunos alumnos dominan los algoritmos, aunque no tienen ni idea de lo que significan las fracciones, ni de lo que se puede hacer con ellas; otros no conocen siquiera el nombre de fracciones particulares. La pobreza fenomenológica del enfoque me parece, en gran parte, responsable de este fallo didáctico.

5.5. LAS FRACCIONES COMO COMPARADORES

5.5.1. *Comparación de objetos concretos*

La didáctica tradicional pasa por alto que la concreción de las fracciones no se agota con romper un todo en partes. Como el análisis lingüístico de la sección 5.3 mostró, las fracciones sirven también para comparar objetos que se

separan uno de otro

o que se

experimenta, imagina, piensa como si se separaran:

en esta habitación hay la mitad de mujeres que de hombres,
el banco es la mitad de alto que la mesa,
la calle es $2\frac{1}{2}$ veces más ancha que el sendero,
Juan gana la mitad que Pedro,
el cobre es la mitad de pesado que el oro.

La comparación se realiza de acuerdo con ciertos criterios,

directa e indirectamente.

Directamente: los objetos que han de ser comparados se colocan juntos, o se consideran de algún otro modo como si el más pequeño fuese parte del más grande, estrategia mediante la cual la fracción como comparador se reduce a fracción como fracturador de un objeto concreto.

Indirectamente: un tercer objeto, digamos una vara de medir, media entre los dos objetos que son comparados siendo transferida de uno a otro, o considerando como si se transfiriera.

[13] Cuando Freudenthal dice *Innovadores* se refiere a quienes, como Papy o Dienes, fueron los protagonistas de la didáctica asociada a la introducción de las "matemáticas modernas".

Los ejemplos anteriores admiten otra formulación:

el número de mujeres de esta habitación es la mitad qu[illegible] número de hombres,
la altura del banco es la mitad de la altura de la mesa,
la anchura de la calle es $2\frac{1}{2}$ veces la del sendero,
el sueldo de Juan es la mitad que el de Pedro,
el peso (específico) del cobre es la mitad que el del oro.

En vez de

los objetos respecto al número o valor de la magnitud,

comparamos ahora

los propios números o valores de magnitudes.

Parece demasiado complicado hacer esta distinción y en la fenomenología insatisfactoria de la investigación psicológica tanto como en la didáctica tradicional está desatendida. En nuestro análisis fenomenológico esto no es superfluo. Uno puede darse cuenta completamente de que comparar con respecto al número o valor de una magnitud precede a la comparación con los propios números o valores de magnitudes, y que lo primero queda, o debería quedar, inmanentemente presente en lo segundo, siempre que las fracciones hayan de ser algo más que un formalismo.

5.5.2. *Fracción y magnitud*

Antes explicamos cómo puede hacerse una distribución en tres partes iguales: con pequeñas cantidades, a ojo; con grandes, apartando alternativamente partes iguales, o algorítmicamente, por división como la inversa de la multiplicación. Si la división termina, no surgirá ningún problema nuevo. Si no, entonces, en problemas realistas, surge la cuestión de qué hacer con el resto. Si es factible su división, entoces el problema *matemático* de distribución y su relación con el problema *real* ha cambiado. Ya no es un conjunto finito lo que se distribuye: el modelo del conjunto finito ya no encaja con el problema real de distribución. Por ejemplo, mejor que seis —discreto— rebanadas de pan, que se distribuyen, es pan, en una cantidad que se piensa como arbitrariamente divisible y según una regla que establece cuándo las cantidades pueden reemplazarse unas por otras para ser consideradas iguales.

El modelo matemático que encaja en esta tarea de distribución, es la *magnitud*. Ya se discutió en el capítulo 1 y es un asunto para ser tratado una vez más. Mientras tanto repetimos los rasgos esenciales:

Constituir una magnitud en un sistema de cantidades requiere:

una relación de equivalencia, que describe las condiciones para substituir objetos (por ejemplo cantidades de una cierta substancia) unos por otros, y que conduce a la *igualdad* dentro de la magnitud, una manera de juntar objetos (cantidades), que lleva a una *adición* a la magnitud,

la disponibilidad sin restricciones de objetos con el mismo valor de magnitud (esto es, en la misma clase de equivalencia), que hace la *adición posible sin restricciones*,

la posibilidad de dividir un objeto en un número arbitrario de objetos parciales que se reemplazan entre sí, que lleva a la *división por números naturales*.

La multiplicación de números naturales es una operación derivada, definida por la adición repetida: "n–ésima parte de[14]" se convierte en el inverso de "n veces". Componiendo multiplicaciones y divisiones entre sí, se obtiene *multiplicaciones por números racionales*.

Si nos restringimos sólo a las *matemáticas*, entonces para definir qué es magnitud podemos estar satisfechos con los postulados de adición y división. En un enfoque fenomenológico debemos comenzar con los objetos que, mediante una relación de equivalencia, se requieren para formar clases que representan valores de magnitud. La disponibilidad sin restricciones de tales objetos en cada clase es, de hecho, indispensable. Hago hincapié en este punto, que a través de una fenomenología defectuosa ha producido una didáctica defectuosa de las fracciones.

Nuestra exposición muestra una asimetría entre la multiplicación y la división. El operador "n–ésima parte de" puede ser aplicado al objeto antes que al valor de la magnitud. Una n–ésima parte puede ser una parte concreta de algo dado. Por otro lado, "n veces" no puede ser realizado por medio del objeto dado; tenemos que utilizar otros, quizás arbitrarios, mientras que "n–ésima parte" puede ser realizado dentro del objeto, y sólo la *elección* de la parte es arbitraria.

Esta asimetría es tan impresionante que ninguna fenomenología puede permitirse pasarla por alto y ninguna didáctica de las fracciones debe dejar de lado los resultados de este análisis. Sin embargo, es precisamente el punto en que la didáctica tradicional de las fracciones muestra sus defectos, de los cuales es probable que se pueda hacer responsable a una fenomenología defectuosa. La fracción como parte de algo es de una concreción tan fascinante y convincente que uno se siente fácilmente satisfecho con este enfoque fenomenológico y olvida los otros. En todos los ejemplos, tanto visualizados como no, uno se limita a fracturar. La n–ésima parte se ve o se imagina exclusivamente *dentro* del todo

[14] En inglés "n–th part of". El castellano admite el ordinal con "parte", que traduce literalmente la expresión inglesa, o el partitivo "n–avo". Aquí hemos traducido sistemáticamente n–th por n–ésimo para respetar la discusión que hace Freudenthal del uso de los ordinales para las fracciones. Una fenomenología hecha en castellano habría de tomar en cuenta la existencia de los partitivos y el empleo tanto de ordinales como de partitivos en las fracciones, lo que quizá llevaría a considerar diferencias entre expresiones como "la duodécima parte" y "una doceava parte"; en la primera permanece el rastro del acto de contar gracias al cual se ha determinado la fracción —y sólo una de las partes es realmente la duodécima—; en la segunda, se señala una cualquiera de las partes en que la fracción ha fracturado el todo. También habría que tomar en cuenta la irrupción en el uso —aunque no esté en la norma— de los partitivos substituyendo a los ordinales.

—algo que no sería factible con "n veces". Fenomenológicamente este enfoque lleva sólo a las fracciones propias (<1). La [illegible] como se abordaran las fracciones mixtas (>1), pero, cuando se [illegible] a ese punto, la matematización de las fracciones y de las operaciones con fracciones está ya en pleno funcionamiento, si no completada; la extensión requerida para fracciones mixtas simplemente es arrastrada por la corriente de matematización, o llevada a cabo de manera puramente formal sin ningún vínculo fenomenológico. Expresiones tales como $1\frac{1}{2}$ son materia de trabajo en el papel, desvinculado de la realidad, que es aún visible en las fracciones propias.

La "fracción como fracturador" no es sólo un comienzo demasiado estrecho, es también unidireccional. Es extraño que todos los intentos de innovación hayan pasado por alto este punto. El moderno análisis fenomenológico ha enfocado el concepto de magnitud con cuidado; se ha reconocido el papel desempeñado por equivalencia y fracciones, pero este análisis fenomenológico nunca ha tenido una vertiente didáctica. En particular, no se han dado cuenta de que la didáctica de las magnitudes no puede ser construida sobre la de las fracciones, que a su vez requiere magnitudes para que sean enfocadas didáctica y fenomenológicamente. La "fracción como fracturador" puede ser descrita mediante un concepto de equivalencia bastante restringido: no requiere más que dividir algo en n partes iguales. Pero en la realidad de la didáctica se necesita una equivalencia de más amplio alcance, así como una disponibilidad sin restricciones de objetos en cada clase de equivalencia. Esta necesidad no ha sido reconocida en la didáctica de las fracciones ni en la elección de modelos didácticos hasta la fecha.

5.6. *Aspectos de la fracción*

Vamos a resumir el contenido de las secciones 5.4—5 formalmente, y a completarlo.

En la medida en que el énfasis mental esté en

algo dinámico o estático

la fracción aparece

en un *operador* o en una *relación*

—partiendo por la mitad contra "la mitad de grande".

Ambos, el operador fracción y la relación, pueden respectivamente actuar sobre

objetos

y relacionar entre sí

objetos

con respecto a ciertas características (número, longitud, salario, peso...) —la mitad de la vara, el banco es la mitad de alto que la mesa, y así sucesivamente— o

—esta longitud es la mitad que, este peso es $2\frac{1}{2}$ veces más que.

Si los objetos comparados son

todo y parte

o son considerados como tales, la fracción aparece en el

operador fracturante o relación de fractura.

Si están

separados,

es mejor hablar de

relación de razón.

Si es acerca de cantidades y magnitudes, la fracción aparece en el

operador razón

que transforma un número, una longitud, un peso, en otro.

De la relación razón establecida entre objetos se puede pasar al operador razón, que actúa sobre cantidades y magnitudes, mediante un estadio intermedio, la fracción en el

transformador,

tal como "aplicación a escala un medio", "prolongando $2\frac{1}{2}$ veces". Esta operación se realiza

sobre el objeto mismo,

aunque no por ruptura, sino por

aplicación y deformación.

Si nos alejamos paso a paso de la esfera concreta que rodea a las fracciones, llegaremos a la

fracción como medidora,

precediendo a una unidad —$2\frac{1}{2}$ en $2\frac{1}{2}$kg, $2\frac{1}{2}$m, $2\frac{1}{2}$cc, $2\frac{1}{2}$botellas— o sin una unidad como es el caso de $\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, ... que mide segmentos

el operador fracción

inverso del operador multiplicación

y la

fracción como número racional.

Como explicamos anteriomente, la didáctica tradicional sólo reconoce a la fracción en el operador fracturante, del cual pasa sin más al final de la secuencia: la fracción como número racional.

5.7. *La fracción en un operador*

Entre los aspectos de la sección 5.6 encontramos un aspecto de operador en tres ocasiones, que son

el fracturante

que pide actuar sobre *objetos concretos* rompiéndolos en partes equivalentes,

el operador razón,

que coloca *las magnitudes en una razón* unas respecto a otras,

el operador fracción formalmente definido

en el *campo de los números.*

Las diferencias parecen innecesariamente complejas, pero didácticamente no lo son tanto —el medio en el cual actúa el operador fracción está siendo despojado de su concreción paso a paso. Inicialmente actúa en los objetos citados concretamente, mientras sus aspectos de magnitud son los factores que controlan la imparcialidad del procedimiento de distribución. Acto seguido, las magnitudes en sí mismas son objetos, mientras que los objetos concretos medidos por ellas son omitidos o pasados por alto en silencio. Aquí hay un nivel intermedio notable, el transformador, que, por decirlo de alguna manera, preserva la substancia mientras cambian proporcionalmente los valores de las magnitudes. Finalmente, el operador fracción actúa en el puro dominio del número, donde satisface la necesidad de inversos de los multiplicadores.

En la *relación* razón, el *operador* razón está, por así decirlo, coagulado, de una operación a una relación entre el objeto operado y el resultado. La fracción como un número de medida, como mota en la recta numérica, y finalmente como número racional es el resultado de aplicar el operador fracción a una unidad. En todos los aspectos de la fracción, se nota el aspecto operador. En una didáctica de las fracciones debería apreciarse, por consiguiente, y en enfoques modernos, de hecho, se ha realizado. Desafortunadamente, esto está aliado con concepciones erradas, expresadas en formulaciones tales como la "fracción como operador". Lógicamente tal interpretación es, desde luego, factible —números y vectores también pueden ser interpretados como operadores. En otra parte* he mostrado los cimientos didácticos en los cuales debe fundarse esta lógica. La interpretación de la fracción como un operador es insostenible, como lo es la terminología que implica. Uno necesita imperiosamente la fracción como *número*, que, a propósito, puede haber surgido al aplicar un *operador* fracción a una unidad. Esto significa que en el *operador fracción* se debe distinguir el *operador* de la *fracción*. El operador con una fracción *en él* no puede soportar un segundo yo en la forma de la fracción *como* operador.

Es un hecho que el aspecto operador es más importante para las fracciones que para los números naturales. En la constitución del objeto mental "número natural", es decisivo el crecimiento paralelo de la raíz cardinal y ordinal, y sólo después de que han sido constituidos los números naturales, se usan en operadores tales como "tres más que", "tres menos que", "tres veces (más que, menos que)".

Las fracciones, sin embargo, muestran el aspecto operador desde el principio, lo que justifica una didáctica llamada a sí misma —por exageración— la interpretación operador de las fracciones.

Una operación que se conoce tan pronto como los números naturales es la operación de distribuir. Si se distribuye un grupo finito de objetos equivalentes en tres partes iguales, es decir, entre tres personas, cada parte es un tercio, esto es, un tercio del total —una extraña terminología[15] cuya fuente problemática he descubierto en la sección 5.3.9 —ahora estamos tan acostumbrados a este extraño uso del número ordinal que ya no somos conscientes de lo curioso que es, ni mucho menos nos sentimos inclinados a protestar por ello, ni a preguntarnos por qué año tras año multitudes de alumnos no lo comprenden.

5.8. *Modelos de la relación razón (Figuras 35—38)*

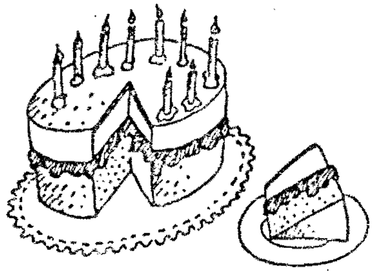


Fig. 35.

* *Mathematics as an Educational Task*, pp. 260-262.
[15] Extraña en Inglés, que no distingue el partitivo *tercio* del ordinal *tercero*: para lo que el castellano tiene esas dos palabras, el Inglés sólo tiene *third*.

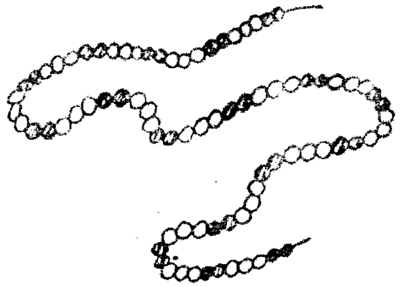


Fig. 36.

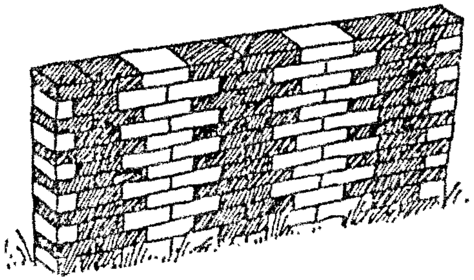


Fig. 37.

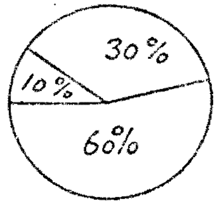


Fig. 38.

El modelo universal de magnitud es "número positivo", visualizado en la recta numérica como longitud, mientras otros modelos pueden ser didácticamente útiles, en particular si se trata de fracciones: área, volumen, peso, hora, por mencionar unos pocos. Longitudes y áreas tienen sus propias visualizaciones: con alguna precaución los volúmenes también pueden ser visualizados gráficamente, aunque las visualizaciones espaciales propiamente dichas, que al mismo tiempo pueden ser palpables, son altamente recomendables.

[illegible]os pesos pueden ser [illegible]alizad[illegible] [illegible]nealm[illegible], en [illegible] [illegible]ala d[illegible] bal[illegible] de[illegible] [illegible]macia o en el brazo de una antigua romana en los que se desplaza una pe[illegible] corrediza; el tiempo se visualiza sobre ejes de tiempo, desplazándose por toda la esfera del reloj, por así decirlo. Cada uno de estos modelos merece nuestra atención ya que puede ser útil en la relación razón.

No mencioné aquí el modelo clásico para fracciones: la distribución del pastel; por no mencionar otros más recientes, tales como las cajas de fracciones. Ciertamente en la práctica didáctica no deben ser omitidos. La distribución del pastel es la predecesora de divisiones generales del círculo que son aplicadas a diagramas de sectores estadísticos, en ruletas y en *spinners*. Como modelos didácticos para fracciones son especialmente efectivos si se ha de tomar conjuntamente varios sectores, con el fin de decir cosas sobre "m de n partes" o"p partes de esto contra q partes de aquello". En un *spinning top*[16], mezclar p partes de un color con q partes de otro color para obtener un cierto tono, es una ilustración efectiva de razones en mezclas. Igualmente, uno puede mezclar líquidos en una razón dada, e ilustrar la mezcla en un diagrama de sectores. Son buenas las ilustraciones ofrecidas por tiras de cuentas, muros y otros patrones en los que las cuentas, piedras, etc., de varios colores o tonos se alternan regularmente en una determinada razón fraccionaria —tres blancas y dos negras— un todo indefinido en el que no se sugiere ningún límite. Si el tema son las fracciones, las porciones particulares se expresarán mediante fracciones. Igualmente, la caja de fracciones puede ser usada estupendamente para hacer histogramas, pero debo decir que no he visto ninguna usada para ello.

Quienquiera que use estos modelos tradicionales ha de tener en cuenta que no son suficientes. Su cruda concreción no debe seducirle hasta el extremo de confiar en ese enfoque limitado. La distribución del pastel tiene lugar *dentro del* pastel: el círculo que ha de ser dividido es el universo, que está dividido en sectores. La esfera del reloj puede ser manejarse con más suavidad: por la relación del tiempo, la restricción a una hora o a medio día se puede hacer desaparecer, la esfera puede, por así decir, ser desenvuelta en el eje del tiempo. La caja de fracciones es la herramienta más restringida: se resiste no sólo a la extensión sino también al refinamiento.

Las longitudes y áreas son los medios más naturales para visualizar magnitudes con respecto a la enseñanza de fracciones. Las longitudes surgen de los objetos rectos y "largos"[17] por medio de la congruencia como relación de equivalencia: si se admite objetos "largos" *arbitrarios*, las congruencias han de ser ampliadas a transformaciones de descomposición y recomposición o flexiones. Las áreas surgen de los objetos planos por la relación de equivalencia de la igualdad de área, que será tratada en el capítulo 13; las congruencias y las transformaciones de descomposición y recomposición contribuyen a la extensión de esta clase de equivalencia. En el proceso de la división del pastel, los sectores

[16]Un *spinning top* es una peonza que se hace girar mediante un tornillo que entra y sale en su parte superior. Usualmente está dividido en sectores de varios colores.

[17]Freudenthal llama *long objects* a los objetos de los que se puede predicar la longitud, los objetos para los que tiene sentido hablar de su longitud. Esta expresión la he traducido por objetos "largos", indicando con las comillas que hay que leer objeto "largo" en el sentido que le da Freudenthal.

[illegible]ares [illegible]mpa[illegible] por [illegible]uenc[illegible] [illegible] que debe garantizar la [illegible]ualdad del área o volumen.

Los segmentos lineales son la representación visual más simple de valores de magnitud. Dos valores de magnitud en una relación fraccionaria se visualizan fácilmente mediante dos segmentos lineales en la misma razón (figura 39); para hacer la comparación de la razón más fácil, las partes pertinentes se pueden marcar; los segmentos lineales representativos se toman, preferentemente, paralelos. Ésta, sin embargo, no es la única forma. Dos árboles contiguos (figura 40) que están en una razón fraccionaria, que puede ser presentada mediante medidas, o usando escalas intermedias; dos libros con grosores en razón fraccionaria; las edades en el eje del tiempo; los pesos en la escala de una báscula de pesa móvil, son otros ejemplos. La mayoría de estas representaciones muestra más de una dimensión lineal, lo cual significa que las otras extensiones pueden ser discutidas también. No son tan delgadas como las longitudes puras, de hecho.

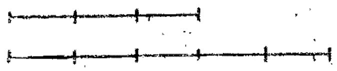


Fig. 39.

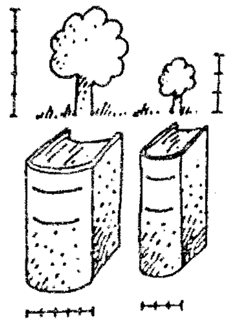


Fig. 40.

Longitudes más delgadas pueden ser estilizadas por rectángulos bajos, tiras que son fijas en una extensión y variables en la otra (figura 41). Para sistematizar esto y para facilitar la comparación se debe dibujar el rectángulo en papel cuadriculado (figura 42), en el que comparar se reduce a contar. Pero, de nuevo, ésta no debería ser la única manera. Se deberían admitir figuras que se solapan a la estructura del papel cuadriculado o que están de través.

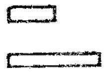


Fig. 41.

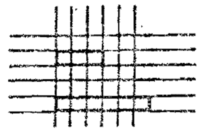


Fig. 42.

brayo una vez más que en todos estos casos los pares de objetos geométricos —segmentos lineales, dominios planos— pueden ser presentados por derecho propio para dar cuerpo a fracciones, o pueden ser representativos de otras clases de pares de objetos —dos árboles, dos libros, dos cuerpos con peso, dos intervalos de tiempo— que han de ser entendidos en su razón fraccionaria. Entonces pueden surgir acoplamientos bastante concretos: peso y precio en las básculas de las tiendas, peso *en* el platillo y longitud en el brazo o *en* la escala del peso de muelle.

5.9. *Modelos del operador razón*

De la forma más natural, "$\frac{3}{5}$ de" se representa mediante dos figuras, una es $\frac{3}{5}$ de la otra longitud o área. Sin embargo, este procedimiento representa "$\frac{3}{5}$ de" insatisfactoriamente como un operador. Es como si se ilustrase una función no mediante una *gráfica* sino mediante *un punto de la gráfica*. Para una función lineal esto es, de hecho, suficiente, pero de ningún modo satisface nuestras expectativas. Para mostrar la acción de "$\frac{3}{5}$ de" en su dominio completo se necesitan otros recursos.

El artilugio más popular en nuestros días es sugerir una máquina —en el presente caso será la máquina "$\frac{3}{5}$ de". Con frecuencia, es meramente una sugerencia verbal ilustrada por un dibujo convencional. La entrada de la máquina es un dato numérico que, no obstante, puede también ser representado geométricamente. La máquina en sí misma no muestra ninguna estructura geométrica o de otra clase. Es una "caja negra". Hasta donde alcanza mi experiencia, autores de libros de texto, profesores y alumnos usan estas máquinas sólo verbalmente, sin relación con ninguna operación de fracción concreta. Mi impresión es que las máquinas deben su origen a los intentos de introducir el *concepto* de función, antes que a las funciones como objetos mentales; las falsas concreciones que son entonces ineludibles han adoptado aquí la forma de una pseudoconcreción: una sugestión verbal.

El dibujo de la distribución de flujo proporciona más concreción para encarnar las fracciones (figura 43). De hecho, la magnitud que fluye hacia adentro y hacia afuera existe sólo en la imaginación —es reemplazada, por así decirlo, por un tiempo indefinido—, pero la imagen bifurcada puede representar la parte fraccionaria (y su complemento) con precisión geométrica.

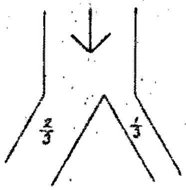


Fig. 43.

176

alqu que l m ele uno ibre lo arbitrariamente, por ejemplo, la imagen del flujo como longitud, pes neda, etc.

5.10. *Modelos del operador razón mediante aplicaciones*

Un cuadro geométrico completo de las operaciones con fracciones, y no sólo geométrico sino global, se obtiene tan pronto como éstas se interpretan de forma genuina mediante operaciones geométricas. Para hacer esto, se aplican rectas unas sobre otras. Hay unas pocas posibilidades, todas ellas aplicaciones afines (figura 44):

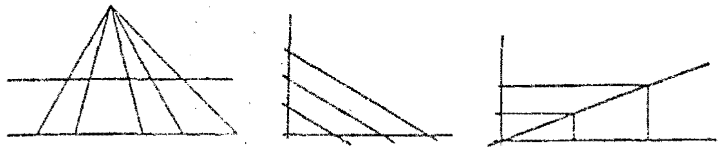


Fig. 44.

proyección central de líneas paralelas (sombra de la lámpara),

proyección paralela de, pongamos, líneas ortogonales (sombra del sol),

composición de dos proyecciones paralelas (tal como la usada en la representación gráfica de una función lineal).

Realizar las construcciones geométricas en detalle puede ser tanto ventajoso como desventajoso: todos los detalles se vuelven conscientemente claros, pero los procedimientos se alargan.

Un modo más atractivo es usar

planos, mejor que líneas, esto es, *planos de proyección*.

Las construcciones detalladas son mucho más difíciles de realizar, pero puede fácilmente prescindirse de ellas si los dibujos están diferenciados para mostrar claramente qué puntos se corresponden entre sí en el original y en la imagen (figura 45). Lo que quiero decir es: dos figuras contiguas, una, ampliación o reducción de la otra, en las que la misma relación razón puede ser establecida para cada detalle particular. Lo mismo puede hacerse en tres dimensiones mediante la construcción de modelos en diferentes escalas.

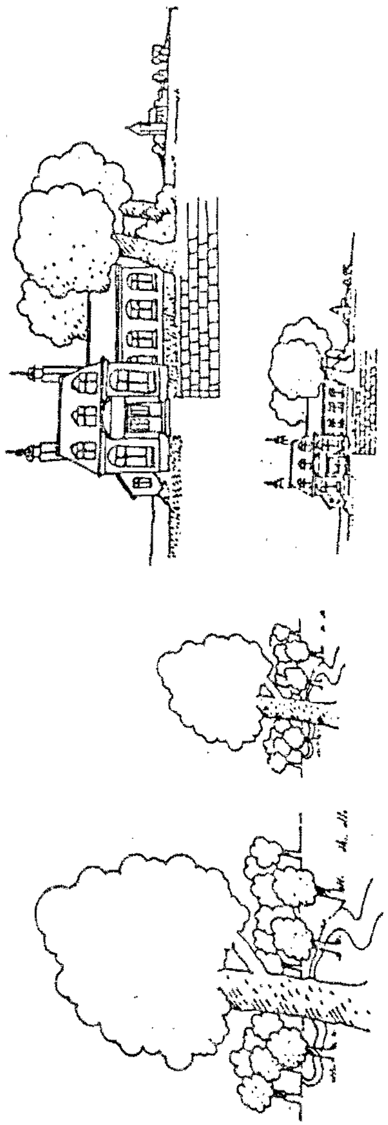


Fig. 45.

177

Un peligro que hay que prever si se usan tales representaciones de 2 o 3 dimensiones es la posible confusión de las razones de longitud, área, y volumen. Sin embargo, incluso si es la razón de longitudes lo que importa, se ha de preferir las figuras planas como medios de representación por su expresividad más global; entonces, para subrayar la longitud, uno puede valerse de dos artificios:

> como figuras planas uno elige bandas estrechas, que son transformadas sólo según la longitud, mientras que se distinguen lugares mediante adornos,
>
> o se toman partes bidimensionales simples, que se transforman según ambas dimensiones, a las que se adjuntan dibujos que sugieren una dimensión, tales como gusanos, serpientes, látigos, monturas de gafas.

5.11. *Teoría matemática del número racional desde el punto de vista del operador razón*

Es harto conocido cómo se introducen los números racionales, empezando con los números naturales (o enteros): se consideran pares ("fracciones") de enteros con un segundo miembro distinto de cero y se prescribe una relación de equivalencia

$$\lceil m, n \rceil = \lceil m_1, n_1 \rceil \leftrightarrow mn_1 = m_1 n;$$

los números racionales son entonces las clases de equivalencia de estos pares. Las operaciones aritméticas están definidas apropiadamente para los pares y, por consiguiente, para las clases de equivalencia.

Esbozo ahora cómo se hace esto si se elige el operador multiplicación para comenzar con él y se sigue una vía genética *a priori* en vez de una vía axiomática *a posteriori*. Las fracciones, entonces, no son el resultado de una definición; en cambio, se descubren y describen.

Consideramos una magnitud S y dentro de S multiplicaciones por números naturales ($\neq 0$), lo que forma un conjunto M, con la composición como una operación en M. M entonces es

> un semigrupo conmutativo
> con identidad y una
> regla de cancelación: $a \circ x = a \circ y \rightarrow x = y$

Tales semigrupos, en general, pueden ser extendidos a grupos, lo que se prueba fácilmente.

En el caso presente es incluso más fácil porque los elementos del semigrupo se dan como multiplicaciones dentro de una magnitud S. Expongo la secuencia de pasos (las letras itálicas son números naturales distintos de cero):

(1) "k veces" es una aplicación inyectiva de S en sí misma.

(2) El inverso de "k veces" se llama "k-ésima parte de".

Todas [illegible] k ve[illegible] [illegible]form[illegible] an con[illegible] M; [illegible] ésim[illegible] te de [illegible] un conjunto M^{-1}.

(4) (k veces) o (m veces)=km veces.

(5) M es cerrado y conmutativo para la composición.

(6) Dado un conjunto T y aplicaciones inyectivas φ, ψ de T en sí mismo, entonces, de

$$\varphi \circ \psi \circ \psi^{-1} \circ \varphi^{-1} = \text{identidad}$$

se concluye:

Si φ y ψ conmutan, entonces φ y ψ^{-1} también, así como φ^{-1} y ψ^{-1}, además $(\varphi \circ \psi)^{-1} = \psi^{-1} \circ \varphi^{-1}$.

(7) Aplicando (6) a S en vez de a T y dos elementos de M en lugar de φ, ψ, se obtiene

$M \cup M^{-1}$ con la composición, ya que su operación es conmutativa.

(8) De la última parte de (6) se deduce que

(n–ésima parte de)o(m–ésima parte de)=(mn–ésima parte de).

(9) Se define

$$\left(\frac{m}{n} \text{ de}\right) = (m \text{ veces}) \circ (n\text{–ésima parte de})$$

que, de acuerdo con (7) puede también ser escrito

=(n–ésima parte) o (m veces).

Aquí $\frac{m}{n}$ todavía no se concibe como símbolo de un número racional. Es más bien un símbolo arbitrario, expresado por medio de m y n.

(10) La regla de multiplicación

$$\left(\frac{m}{n} \text{ de}\right) \circ \left(\frac{k}{l} \text{ de}\right) = \left(\frac{mk}{nl} \text{ de}\right)$$

se deriva de (9), (8), (7).

(11) $$\left(\frac{k}{k} \text{ de}\right) = (1 \text{ vez})$$

se deriva de (8) y (2).

(12) La regla de cancelación

$\frac{mk}{nk}$ ([illegible] $\frac{}{n}$ de

se deriva de (10) y (11). Esto nos permite presentar números racionales como clases de fracciones.

(13) Los $\left(\frac{m}{n} \text{ de}\right)$ forman un conjunto N, que, según (11), es cerrado y conmutativo.

(14) $\left(\frac{m}{n} \text{ de}\right)$ es una aplicación inyectiva de S en sí mismo con $\left(\frac{n}{m} \text{ de}\right)$ como su inverso.

(15) N es un grupo conmutativo de aplicaciones inyectivas de S en sí mismo.

Parece terriblemente complicado, aunque refleja nada más que la existencia de números racionales en los operadores multiplicación; falta la suma, y los números racionales no están liberados todavía de su formulación como operador. Sin embargo, la secuencia anterior no debe entenderse en el sentido de que cualquiera de sus pasos se haría explícito, excepto si se hace paradigmáticamente. Si miramos más de cerca lo que se requiere didácticamente en esta línea de pensamiento, entonces obtendremos la siguiente secuencia:

el objeto mental "aplicación inyectiva", aunque especializado a estiramientos y contracciones del rayo numérico,

la actividad mental de componer e invertir aplicaciones,

el reconocimiento de "k veces" (para k paradigmático) como una aplicación inyectiva y la identificación de ciertas aplicaciones como "k veces",

el ver e identificar el inverso de "k veces" como "k–ésima parte de" o "$\frac{1}{k}$ de" (conocido así desde la tarea de división),

la composición mental de "k veces" y "m veces" (para k y m paradigmáticos) y el reconocimiento del resultado como "km veces",

la composición mental de "n–ésima parte de" y "m–ésima parte de" (para n y m paradigmáticos) y el reconocimiento del resultado como "mn–ésima parte de",

la definición y reconocimiento como una aplicación de "$\frac{m}{n}$ de" como compuesto de "m veces" y "n–ésima parte de" en orden arbitrario,

la composición mental de "$\frac{m}{n}$ de" y "$\frac{k}{l}$ de" y la comprensión de la regla de multiplicación,

..., rep... ndo... que ... ...rmina ... mi respuesta "pues lo con... ...ron" reacciona como si hubiera despertado de un sueño —de repente se da cuenta de que hay más cosas entre cielo y tierra que las soñadas en las lecciones de aritmética que ella ha tenido hasta ese momento.

Dibuja esbozos de ocho botellas unas al lado de otras, divididas cada una de ellas en tres partes, da a cada persona ocho tercios —en realidad ella no conoce esta palabra, pero dice "botellitas"— y porque lo sugería el problema en su conjunto ella dio a A la parte de la izquierda, a C la de la derecha, y a B la parte del medio.

Posiblemente habría alumnos que asignarían todas las partes de abajo a A, las del medio a B y las de arriba a C. "¿Puede hacerse de otro modo?", se puede preguntar. Los niños hallan una rica variedad de soluciones. (Las permutaciones contempladas son 280, pero la intención de esta pregunta no es encontrarlas todas).

El mismo problema puede ser planteado con otros números. Es particularmente instructivo intentarlo con los siguientes, unos tras otros:

24 botellas y 5 personas,
26 botellas y 5 personas.

En un contexto visual los niños aprenden

> con respecto a una m-partición a cambiar los todos en m-ésimos (para m pequeño), usando particiones aditivas de k en $k_1+\ldots+k_i$, con la intenciónde obtener particiones aditivas de $\frac{k}{m}$en $\frac{k}{m}+\ldots\frac{k}{m}$ ejercitando, en particular, la partición de todos.

La notación inicial es k m-ésimos; la notación $\frac{k}{m}$es de aparición posterior. Si los todos se dividen, la notación inicial sería $1+1+\frac{2}{3}$, $2+\frac{2}{3}$, para finalizar con $2\frac{2}{3}$.

El propósito es

> transferir adición, substracción, relación de orden desde N isomórficamente a $\frac{1}{m}$ N $\left(x \rightarrow \frac{x}{m}\right)$

mientras se afloja el vínculo visual esto puede mantenerse mediante tablas como

0	1	2	3	
$\frac{0}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	
0	1	2	3	4
$\frac{0}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{4}{12}$
$=0$		$=\frac{1}{6}$	$=\frac{1}{4}$	$=\frac{1}{3}$

180

En este punto se puede practicar ... simplif... n de denominadores como 12, 24, 60.

Entonces se visualizan tablas nuevamente en la recta numérica en las que los puntos correspondientes se unen (figuras 46 y 47).

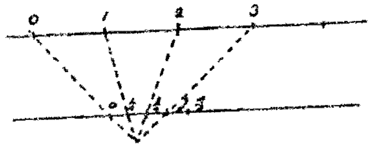


Fig. 46.

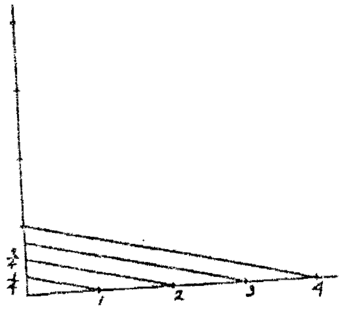


Fig. 47.

Las multiplicaciones pueden prepararse como adiciones repetidas: después de plantear

$\frac{2}{3}+\frac{2}{3}$

$\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}$

$\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}$

hacer la pregunta: "¿Cómo puedes decirlo de otras maneras?"

Ejemplos cautos de división:

la mitad de $\frac{2}{3}$, de $\frac{4}{3}$, de $\frac{6}{3}$,

y aún más cautamente

un tercio de $\frac{2}{3}$...

5.13 Se distribuye cerveza entre parejas y después viene la distribución entre ambos miembros de cada pareja —una secuencia algo más compacta que la anterior, que pretende

transferir la adición, substracción, orden desde $\frac{1}{n}N$ a $\frac{1}{pm}N$ $\left(x \to \frac{1}{p}x\right)$ y

entender el isomorfismo $x \to \frac{1}{pm}x$ como el producto de los isomorfismos $x \to \frac{1}{m}x$ y $x \to \frac{1}{p}x$.

La misma situación visualizada por modelos de flujo o de árbol produce la figura 48.

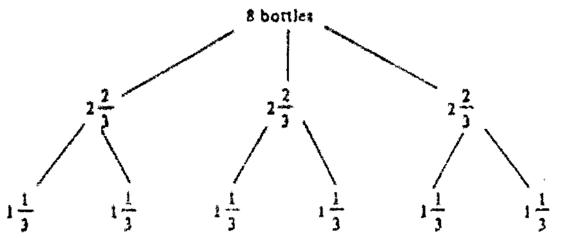


Fig. 48.

5.14 Un dibujo de un rebaño de ovejas: el granjero vende una de cada tres (esto es, $\frac{1}{3}$). Táchalas. ¿Qué queda? Si había 120, ¿cuántas se vendieron?, ¿cuántas quedaron?

$\frac{1}{3}$ de 120= $\qquad$ $\frac{2}{3}$ de 120=

El tablero con cien cuadritos: colorea de rojo $\frac{1}{5}$ de los cuadrados. ¿Puede hacerse de modo diferente? Colorea $\frac{2}{5}$ rojos. ¿Puede hacerse de otra manera? ¡Encuentra pautas hermosas!

Lo mismo con un muro de ladrillos —todo indefinido.

Una lotería con mil lotes. Uno de cada cinco gana. ¿Cómo fijas cuáles? Uno de los cinco obtiene al menos la devolución de su apuesta; un tercio de éstos, dobla su apuesta. ¿Cuántos?

Hay 10 primeros premios —esto es, uno de cada...

Toma una cinta; dóblala en dos, en tres. ¿Qué parte de la original es la cinta doblada? Dóblala hasta que sea un sexto.

Cintas que se encuentran una debajo de otra en una razón visual $m:n$. Si una vale A, ¿cuánto valdrá la otra?

El objetivo de estos problema es

reconocer y evaluar casos de la función $x \to \frac{1}{m}x$ en relaciones y visualizaciones numéricas.

5.15 $\frac{m}{n}$ ha funcionado sistemáticamente como un número solamente en medidas tales como $\frac{2}{3}$ de botella, $\frac{2}{3}$ de cinta. Lo siguiente pretende

constituir, construir, reconocer la función $x \to \frac{m}{n}x$.

Aquí está el árbol A.
Dibuja el árbol B la mitad de alto que el A.
Dibuja el árbol C tres veces más alto que el B.
Dibuja el árbol D un tercio del árbol C.
Dibuja el árbol E cinco veces más alto que el D.
Dibuja el árbol F un tercio del E.

Puedo escribir también

$B = \frac{1}{2}$ de A,
$C = 3$ veces $B = \ldots A$,
$D = \frac{1}{3}$ de $C = \ldots B = \ldots A$,
$E = 5$ veces $D = \ldots C = \ldots B = \ldots A$,
$F = \frac{1}{3}$ de $E = \ldots D = \ldots C = \ldots B = \ldots A$.

Yo poseo una

lente convexa $\qquad$ a través de la cual veo todo 3 veces más grande

y una

lente cóncava $\qquad$ a través de la cual veo todo $\frac{1}{5}$ de grande.

Miro la flor a través de ambas en hilera (Figura 49)

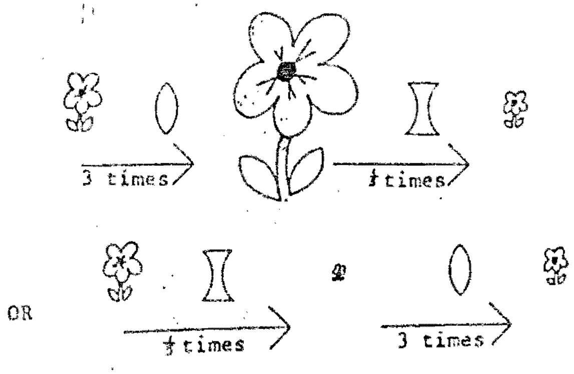


Fig. 49.

¿Cuál es el resultado en ambos casos?

Una variedad de ejemplos debería servir para

> ejercitar la composición de la función $x \to mx, x \to \frac{1}{n}x$ en un número arbitrario, soportable visualmente al igual que numéricamente aislado, por ejemplo, evaluando ($\frac{1}{3}$ de) (5 veces) ($\frac{1}{6}$ de) (2 veces) aplicado a longitudes y números, y reconociéndolo como $\frac{5}{9}$.

5.16 Lo que sigue sirve para

> reemplazar "$\frac{m}{n}$ de" por "$\frac{m}{n}$ veces".

Como se ha mencionado anteriormente, la mayoría de los libros de texto no se preocupan por motivar esta equivalencia. Es molesto que "tres veces" sea una operación natural, como es "$\frac{1}{3}$ de", mientras la lengua vernácula no da cuenta de su carácter similar. Hay, sin embargo, una oportunidad, como se destacaba anteriormente, en la que el lenguaje cotidiano —hasta donde yo sé, en todos los idiomas— admite el paso desde "$\frac{m}{n}$ de" a "$\frac{m}{n}$ veces", a saber, en procesos cíclicos:

> girar la llave $2\frac{1}{2}$ veces en la cerradura,
> la manecilla grande ha rodado $3\frac{1}{2}$ veces alrededor del reloj,
> el satélite ha dado la vuelta $10\frac{2}{5}$ veces alrededor de la Tierra —¿dónde está ahora?
> el tiovivo ha dado la vuelta $5\frac{1}{2}$ veces,
> también lo ha hecho la noria —¿dónde estarás ahora?

Los circuitos irregulares en la feria,

> la montaña rusa,
> la casa encantada,

permiten la misma cuestión, así como los movimientos oscilantes,

> $3\frac{1}{4}$ veces osciló adelante y atrás,
> $3\frac{1}{2}$ veces viajó de A a B.

Estas "veces" pueden ser interpretadas también como multiplicadores de números,

> $3\frac{1}{3}$ veces alrededor del reloj —¿cuántos minutos son?

alrededor del reloj es 60 minutos, $3\frac{1}{3}$ alrededor del reloj es...?

> $10\frac{2}{5}$ veces alrededor de la tierra dura...?

—una vez dura....

> $5\frac{1}{2}$ veces el tiovivo —¿cuánto dura? ¿cuántos caballos?

> $3\frac{1}{3}$ veces desde A a B, ¿cuánto cuesta?

Y la escalera de caracol

> $5\frac{2}{3}$ veces vueltas, ¿cuántos escalones?

De los procesos cíclicos a los periódicos,

> $3\frac{1}{2}$ cientos de veces haciendo tic-tac el reloj (mecanografiando, rodando el odómetro, saltando)

y al rodar una rueda

> ¿cómo de lejos tras girar 1, 2, 3 veces , $1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{3}$ veces?

Esto conduce de un modo natural a

> $1\frac{1}{2}$ veces, $2\frac{2}{3}$ veces una medida dada,

que puede darse también numéricamente.

Se establece por tanto un lenguaje natural de "$1\frac{1}{2}$ veces", "$2\frac{2}{3}$ veces". Como ejemplos he tomado hasta aquí fracciones mixtas, que veo que son didácticamente importantes. En $4\frac{2}{5}$ veces la parte entera 4 sugiere qué operación debería realizarse y arrastra tras sí $\frac{2}{5}$ En la progresión de la secuencia didáctica, sin embargo, las fracciones propias aparecerían más frecuentemente.

5.17 De momento

"$\frac{m}{n}$ de" y "$\frac{m}{n}$ veces"

están juntas; al final deberán

ser identificadas una con otra.

Esto puede hacerse aplicándolas, en donde ambas sean significativas (Figura 50):

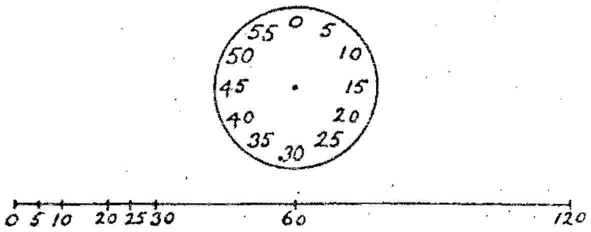


Fig. 50.

$\frac{1}{2}$ veces 60 (alrededor del reloj) = $\frac{1}{2}$ de 60 (en el segmento lineal)

$2\frac{2}{3}$ veces 60 (alrededor del reloj) = $2\frac{2}{3}$ de 60 (en el segmento lineal).

Es crítico que

la identificación se haga consciente

para que se pueda invocar su recuerdo, si hay errores. De la misma manera,

conscientemente: $\frac{2}{3}$ de $1\frac{2}{3}$ veces $1\frac{2}{3}$.

Identificar la fracción en el operador de fracción y la fracción como número racional se aplaza, sin embargo. $\frac{5}{3}$ se introducía como

"5 veces $\frac{1}{3}$ de" o "$\frac{1}{3}$ de 5 veces".

Ahora el asunto sería

conscientemente: "5 veces $\frac{1}{3}$ veces" o "$\frac{1}{3}$ veces 5 veces".

En general, otros ejemplos deben repetirse para

reemplazar conscientemente "$\frac{m}{n}$ de" por "$\frac{m}{n}$ veces".

183

5.18 Dado un punto A en el rayo, la escala racional de $\frac{m}{n}A$ se construye sistemáticamente —la expresión se lee como $\frac{m}{n}$ veces A.

En este dibujo (Figura 51)

para un punto $\frac{p}{q}A$

su imagen por "m veces",
su imagen por "$\frac{1}{n}$ veces",
su imagen por "$\frac{m}{n}$ veces"

puede ser localizada, de manera que

a la escala de los múltiplos racionales de A, se aplica la operación "$\frac{m}{n}$ veces",

para validar paradigmáticamente la fórmula

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} A = \frac{m \cdot p}{n \cdot q} A.$$

De aquí, mediante la eliminación de A, la

fórmula de multiplicación

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{m \cdot p}{n \cdot q}$$

se hace

consciente paradigmáticamente.

Los ejercicios en casos especiales tales como

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{n}{m} = 1,$$

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{n}{q} = \frac{m}{q}$$

están incluidos.

5.19 Parece natural añadir la división de fracciones a esta secuencia, a saber,

como el inverso de la multiplicación

$(?x)ax=b.$

En el caso $b=1$ este problema se resolvió al final de la sección 5.18:

$(?x)ax=1$

se resuelve dando la vuelta a la fracción que representa a, cabeza abajo, y para resolver

$(?x)ax=b,$

este resultado ha de ser multiplicado por b. Esto, sin embargo, no responde didácticamente al problema de la división de fracciones. Toda pista de que dividir está de alguna manera relacionado con la realidad falta en esta aproximación.

Interpretar $b:a$ como una

división distributiva,

esto es, como partición de b en a partes, carece igualmente de sentido a menos que a sea un entero.

Es más apropiado entender $b:a$ como una

división razón,

que contesta a la pregunta

¿cuántas veces cabe a en b?,

por ejemplo, si ambos se visualizan como longitudes. Pero entonces es más apropiado hacer esta pregunta honestamente en el contexto de razones, que abordaremos en el próximo capítulo. Presupongamos este contexto por un momento como una precondición didáctica, con la conclusión operativo:

las divisiones $b:a$ y $bc:ac$ $(c\neq 0)$ son equivalentes,

esto es, dan el mismo resultado. De hecho, éste es un importante principio que no se hace significativo hasta que las fracciones están en juego —esto no valdría para divisiones con resto.

Desde luego este principio puede también ser motivado si la división se entiende como el inverso de la multiplicación:

$ax=b$ y $acx=bc$ $(c\neq 0)$

tienen la misma solución x. Así como en el contexto de "razón" el principio puede ser también motivado con enfoques simples, tales como

$\frac{2}{3}$ cabe en $\frac{4}{3}$ tantas veces como 2 en 4,
$\frac{2}{3}$ cabe en 6 tantas veces como 2 en 18,
$\frac{2}{3}$ cabe en $\frac{7}{6}$ tantas veces como 4 en 7,
$\frac{2}{3}$ cabe en $\frac{8}{5}$ tantas veces como 5 en 12.

Lo esencial de este principio es

reducir la división de fracciones a la de enteros
vía fracciones con *igual denominador*

—un procedimiento que es formalmente equivalente a

multiplicar con el divisor puesto al revés,

aunque está mejor motivado didácticamente.

5.20 Sumar, restar y comparar fracciones se apoyan en la imagen de la recta numérica, tal como se preparó en la sección 5.12:

comprender visualmente la situación mutua de

$\frac{1}{4}$N y $\frac{1}{6}$N;

encontrar para los p y q paradigmáticos un r tal que

$\frac{1}{p}$N y $\frac{1}{q}$N;

están comprendidos en $\frac{1}{r}$N.

Sumar, restar y comparar se realiza, de acuerdo con la sección 5.12, en un $\frac{1}{n}$N, que se produce en cada caso particular.

5.21 Las combinaciones de sumas y pultiplicaciones se ejercitan en modelos de flujo (Figura 52):

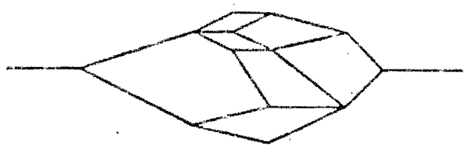


Fig. 52.

Las conexiones se hacen de nuevo entre las capas

$$N,\ \frac{1}{10}N,\ \frac{1}{100}\ N,\ \frac{1}{1000}\ N,..$$

esto es

$$a = \frac{1}{10}\cdot 10a, \text{ etc.,}$$

así,

3'14=3'140, y así sucesivamente.

Adición, substracción, comparación se realizan en cada red

$$\frac{1}{10}\ N,\ \frac{1}{100}\ N,\ \frac{1}{1000}\ N$$

separadamente. La multiplicación vincula dos redes una a otra. Gracias a

$$\frac{1}{10^{r}}a\cdot\frac{1}{10^{s}}b = \frac{1}{10^{r+s}}ab \qquad (a \in N, b \in N)$$

se obtiene

$$\frac{1}{10^{r}}N\cdot\frac{1}{10^{s}}N = \frac{1}{10^{r+s}}N$$

El algoritmo de la multiplicación se aumenta con una regla sobre la colocación del punto decimal.

En las divisiones se tiene cuidado, de acuerdo con 5.19, con que el dividendo y el divisor pertenezcan a la misma red; esto es, transformar el problema en la forma

$$\frac{1}{10^{m}}a : \frac{1}{10^{m}}b,$$

que es equivalente a

$$a : b.$$

5.24a *Un comentario didáctico*

En la enseñanza compensatoria y en las observaciones en las instituciones de formación de profesores (cf. sección 4.36a), se me ocurrió que la didáctica usual, que apunta a la enseñanza de reglas para el lugar del punto decimal puede conducir a un bloqueo de la intuición y de la necesidad de intuición. Una vez estas reglas han sido formuladas y aprendidas, es casi imposible corregir

aplicaciones erróneas, mediante la apelación a la intuición. Si se necesitan, tales reglas serían el término de un desarrollo, que no puede ser acelerado artificialmente. Las reglas se entenderían en diferentes niveles.

El más bajo es comenzar con la explicación de que a la izquierda del punto decimal están los enteros y de que al punto decimal le siguen por la derecha las décimas, centésimas y así sucesivamente, y le preceden por la izquierda las unidades, decenas, centenas y así sucesivamente. Multiplicar por 10 y dividir por 10 cambia las unidades en decenas y las decenas en unidades, respectivamente. Esto puede ser ilustrado por un ábaco con un punto decimal. Igualmente útil es una escalera de refinamiento

.
.
.
1000
100
10
1
0'1
0'01
0'001
.
.
.

que se puede relacionar con las medidas del sistema métrico. Multiplicar y dividir por 10, 100, 1000..., se experimenta como una acción en esta escalera. Esto prepara la multiplicación mutua (positiva y negativa) de potencias de 10. Puede preguntarse cuándo la notación usual por potencias de 10 debería introducirse (cf. sección 4.36a). Escrito como sea, multiplicar y dividir (positiva o negativamente) potencias de 10 precede a la introducción formal y al aprendizaje de la multiplicación y división de las fracciones decimales en general. La reducción de multiplicaciones y divisiones en este dominio a las en N, por medio de la extensión de potencias de 10, merece preferirse más que la memorización de reglas sobre la situación del punto decimal.

5.25—26 *Desarrollo decimal*

5.25 La división de fracciones decimales se reduce por estos medios a la de enteros, esto es, a lo que se llama el

desarrollo de $b : a$, o la fracción $\frac{b}{a}$, en una fracción decimal,

que puede ser de longitud infinita.

Hasta aquí las fracciones decimales han sido tratadas como fracciones con potencias de 10 como denominadores, lo que significa que una división o una fracción es transformada de

$$\frac{b}{a} \text{ a } \frac{e}{10^n}.$$

Para que esto sea posible, la fracción en su forma simplificada debe poseer un denominador que sea un divisor de una potencia de 10, esto es, el denominador no debe poseer factores primos distintos de 2 y 5.

Otras fracciones no admiten tal desarrollo —finito.

Transformar

$$\frac{b}{a} \text{ en } \frac{e}{10^n}.$$

se realiza por medio de una división

$$10^n b : a = e,$$

basada en

$$b : a = \frac{1}{10^n}(10^n b : a),$$

esto es tanto como decir, en el dividendo y finalmente en el cociente se pasa a $\frac{1}{10^n}$ como nuevas unidades antes de realizar la división.

En realidad esto ocurre sucesivamente:

> tras la primera división de b por a las unidades del resto se cambian en décimas, con las cuales se continúa la división; el nuevo cociente, siendo un número de décimas, se pone en la primera posición a la derecha del punto decimal;
> el resto se cambia en centésimas, con las cuales se continúa la división; el nuevo cociente, siendo un número de centésimas, se pone en segunda posición a la derecha del punto decimal, y así sucesivamente.

Si el denominador no tiene factores primos distintos de 2 y 5, el procedimiento termina con el resultado deseado. En otros casos, una fracción decimal infinita sale a la luz,

$$\frac{1}{3} = 0'33\ldots$$

$$\frac{1}{7} = 0'142857142857\ldots$$

Lo que es pertinente matemáticamente aquí difiere mucho de lo que ha sido tratado hasta ahora en esta fenomenología didáctica. Pertenece a la teoría de números y a las series infinitas, que, sin embargo, no excluyen una aproximación fenomenológica que encaja en la presente estructura.

5.26 No hay en este momento necesidad de colocar el desarrollo infinito de las fracciones en la estructura de series infinitas o, para lo que nos ocupa, en la de fracciones decimales infinitas, en general. Esto puede volverse a tomar más adelante. También hay poca necesidad de apelar a la teoría de números para explicar la periodicidad del desarrollo. Se hace de un modo más elemental.

Una división por n produce en cada paso particular un resto que, considerado como un entero, es un número menor que n. Por tanto, entre los n primeros restos parciales hay al menos dos iguales. Hay una primera vez en la secuencia de restos en que un resto se iguala a uno previo. Asumamos que es el j–ésimo el que es igual que el i–ésimo, esto es, el trozo desde

> el i–ésimo al $(j-1)$-ésimo cociente

se repite periódicamente. El desarrollo decimal de un número racional

> eventualmente se convierte en periódico.

Puede ser

> periódico puro

o el período está precedido por un segmento inicial. Ejemplos del primer tipo;

$$\frac{1}{3} = 0'3\ldots; \qquad \frac{1}{7} = 0'142857\ldots;$$

del segundo tipo

$$\frac{1}{6} = 0'166\ldots \qquad \frac{1}{35} = 0'0285714285714\ldots$$

¿Cómo podemos predecir lo que ocurre?

Los ejemplos sugieren: el desarrollo decimal de la fracción —simplificada— es

> periódico puro o no

según que el denominador n

> tenga o no

un factor primo 2 o 5.

Esto parece ser correcto: el período del desarrollo de $\frac{m}{n}$ aparece cuando para ciertos i y j los restos después de la división i–ésima y j–ésima son iguales, lo cual significa que

> $10^i m$ y $10^j m$ dan el mismo resto,

cuando se dividen por n. En otras palabras,

$(10^{l}-10^{j})m$ es divisible por n.

Si n no tiene factores primos 2 y 5 , esto implica que

$(10^{l-1}-1)m$ es divisible por n,

luego

$10^{l-1}m$ y m dan el mismo resto,

cuando se dividen por n. De este modo el período empieza inmediatamer
después del punto decimal.

A la inversa: tómese un desarrollo periódico puro con un período d
digamos, longitud l. Sea c el período considerado como un número natur
Entonces

$$\frac{b}{a}=c\left(\frac{1}{10^{l}}+\frac{1}{10^{2l}}+\ldots\right)$$

La expresión e, entre paréntesis, se puede calcular de la siguiente forma

$$10^{l}e=1+e$$

de donde

$$e=\frac{1}{10^{l}-1},$$

luego

$$\frac{m}{n}=\frac{c}{10^{l}-1}.$$

Ahora 10^{l}-1 ciertamente no tiene factores primos 2 o 5, ni tampoco n. Lueg
si el desarrollo —simplificado— de $\frac{m}{n}$ es periódico puro, el denominador n n
tiene factores primos 2 o 5.

5.27. *Otras bases*

Con respecto a llegar a conocer y trabajar en sistemas posicionales distinto
del decimal, los argumentos de la sección 4.43 pueden ser repetidos, aunque s
puede mencionar una cierta diferencia. En general, no se espera que un cambio d
bases cree mayor intuición, incluso con vistas a desarrollos que terminan y qu
no terminan. Si se ha entendido qué denominadores, en el sistema decima
conducen a desarrollos infinitos, por qué son finalmente periódicos, y qué caso
son periódicos puros, la transición a una nueva base g puede abrir nueva
perspectivas. Los divisores de 10 son reemplazados por los de g y esto tien
diferentes consecuencias según g sea un número primo, una potencia de u
número primo u otro tipo de compuesto. Depende de la situación instruccion
total y en particular del grupo especial de alumnos a los que concierne, si la
intuiciones adquiridas en dicho curso merecen el trabajo de introducir otro
sistemas posicionales.

1 Enseñanza de la geometría realista*

Koeno Gravemeijer

Introducción

Este documento trata de un tipo de enseñanza de la geometría muy diferente a la tan conocida geometría deductiva que se enseña en casi todas partes en los niveles educativos secundarios. Proponemos una "geometría realista", si bien no con la intención de que desplace a la otra, sí para que se utilice como una valiosa fuente de preparación para la geometría más formal. Esta introducción a la geometría realista también puede servir para aclarar algunos aspectos de la teoría de la enseñanza realista.

Ejemplos de la geometría realista

Podemos ilustrar la idea de la geometría realista con unos ejemplos.

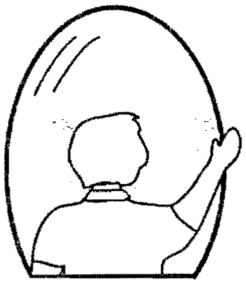
1. Quieres tomar una foto de muchas personas y te das cuenta de que no todas caben en la fotografía, ¿qué haces?... Das un paso para atrás.

¿Por qué el fotógrafo, al colocarse a mayor distancia, logra que entren más personas en la fotografía? Parece tan obvio que casi nadie hace esa pregunta. Sin embargo, la respuesta requiere de una interpretación geométrica de la situación. En los siguientes ejemplos, se demuestra el carácter aparentemente misterioso de los problemas geométricos que observamos en la experiencia cotidiana.

2. *Viajas en un tren que se mueve a lo largo de un paisaje iluminado por la Luna. Independientemente de la velocidad del tren, parece que la Luna te va siguiendo. ¿Qué causa este efecto?*

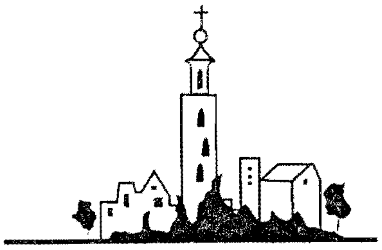
* "Realistic geometry instruction", en *Research in Mathematics* [illegible]
[Traducción realizada con fines académicos, no de lucro, para los [illegible] normales.]

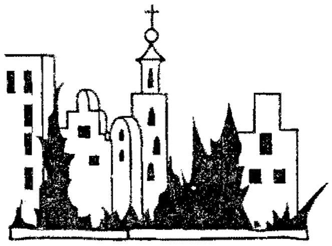
3. ¿Cómo es que un espejo invierte la derecha y la izquierda de la imagen, pero no arriba y abajo?



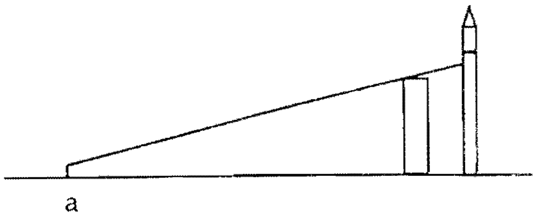
4. Si vas manejando por una calle larga en la ciudad, los edificios más altos del fondo parecen estar por debajo de los edificios más pequeños al frente. ¿Qué sucede?

O, para plantear la última pregunta de otra manera, si un personaje se va acercando a la silueta de un pueblo en las tierras planas de Holanda, la iglesia parece ir disminuyendo de altura hasta que finalmente queda cubierta por los demás edificios.



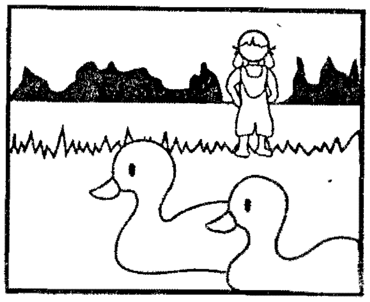


Un esquema lateral de la visión nos explica qué pasa. Digamos que hay una iglesia y un hotel frente a ella. Un observador que ve hacia el pueblo desde el punto a, ¿qué parte de la iglesia ve?

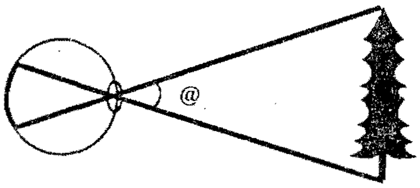


Tracemos una línea (recta) de visión para ver cómo cambia si el observador empieza a moverse, y cómo la parte visible de la iglesia gradualmente disminuye. Por lo tanto, para él, la iglesia parece estar hundiéndose detrás del otro edificio. Sin embargo, ¿se hunde o encoge? De hecho, crece conforme uno se acerca, pero el edificio que está más cercano parece crecer a un ritmo más rápido que lo que está detrás de él. Profundicemos un poco sobre este punto.

Cualquier objeto se ve más grande mientras más cerca esté de nosotros. Esto resulta tan obvio que ni siquiera lo pensamos. Sin embargo, investiguemos [illegible] efecto. El tamaño que percibimos en un objeto depende de lo que llamaremos el ángulo de visión (@). Su tamaño está determinado por el tamaño del objeto y por la distancia entre el **objeto y el** observador. Mientras mayor es la distancia, menor el ángulo; por lo tanto, la distancia determina la escala a la cuál vemos los objetos.

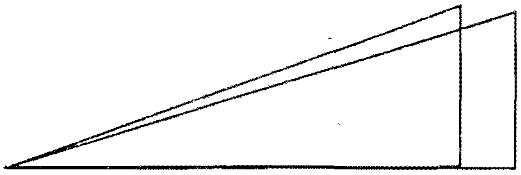


Lo que se ve más grande está más cerca.

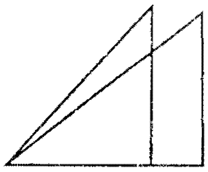


Regresemos al ejemplo del hotel y la iglesia.

Podemos razonar de la siguiente forma. A lo lejos (a) ambos edificios se ven aproximadamente en la misma escala. Pero al irnos acercando (b), la diferencia entre las escalas se vuelve mayor.

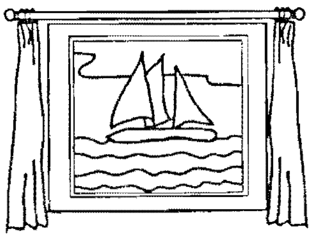


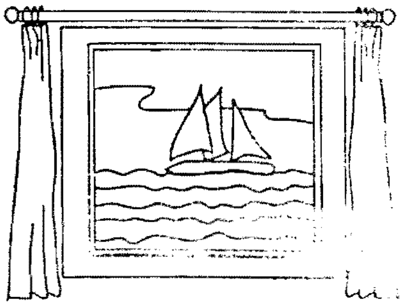
a. Ángulo de visión desde lejos.



b. Ángulo de visión desde cerca.

Este cambio relativo de escala también se puede observar al acercarse a una ventana, pues mientras más te acercas, más amplia es la vista.





Podríamos decir: "Bonitos ejemplos, pero ¿son geometría? Es más, ¿son matemáticas?". Contestaremos primero la segunda pregunta y después regresaremos a la primera. El significado de las matemáticas depende de lo que uno quiera que éstas sean: un sistema establecido o una actividad.

Las matemáticas y su enseñanza

En la enseñanza de las matemáticas realistas, estamos de acuerdo con Freudenthal (1971) que ve a las matemáticas como una actividad, similar a la actividad de un matemático, es decir, una actividad de resolución de problemas, búsqueda de problemas y organización o matematización de un tema.

> Esto puede ser materia de la realidad que tiene que organizarse de acuerdo con los patrones matemáticos si se desean resolver los problemas de la realidad. También puede ser materia matemática, con resultados nuevos o viejos, con los propios o los de los demás, que tienen que estar organizados de acuerdo con nuevas ideas, para ser mejor entendidos, en un contexto más amplio o a través de un enfoque axiomático.
>
> Hoy en día, gran parte de la actividad matemática consiste en organizar. Nos gusta ofrecer los resultados de nuestra actividad matemática de forma bien organizada donde no haya rastros de la actividad mediante la cual fueron creados. (Freudenthal 1971; 413-414.)

Freudenthal se opone a la enseñanza de las matemáticas a través de la implementación de los resultados de las actividades matemáticas. Mientras que en la historia las matemáticas empezaron como una herramienta para resolver problemas de la vida real y después evolucionaron a ideas más generales y formales, la enseñanza empieza con el sistema formal para después presentar las aplicaciones. Él llama a esto una inversión antididáctica. Le quita la oportunidad al estudiante de experimentar las matemáticas como una actividad matemática.

Para afrontar esta tradición educativa, se tendría que empezar con problemas de la vida real y estimular la matematización como el principio de aprendizaje principal. La matematización puede permitir a los estudiantes reinventar las matemáticas más que absorber unas preconstruidas. Con la referencia a la historia de las matemáticas, Freudenthal apoya este principio de reinvención como la fuente de inspiración para los diseñadores de *curriculum* de enseñanza.

Después de la matematización, Freudenthal observa que "buscar un problema" es una actitud matemática. La geometría realista es un campo maravilloso para desarrollar y practicar esta actitud reflexiva. Reflexionar en la práctica ha sido un punto clave en el desarrollo de la geometría, ya que esta ciencia empezó a través de la resolución de problemas prácticos. Era parte de la sabiduría sobre algún oficio mucho antes de que se empezara a estudiar formalmente y su estudio posterior surgió más por curiosidad que por afán de tener un mayor éxito en el oficio, aunque más adelante los resultados de esta actividad también se pudieron aplicar. Se dice que los egipcios utilizaron el triángulo de lados 3, 4 y 5 para construir ángulos rectos.[1] Según la tradición griega, se le da a Pitágoras el crédito de haber elevado la geometría al nivel de un arte liberal, es decir, que podía ser ejercido por los ciudadanos libres, más que por los artesanos. El trabajo de sus discípulos condujo, entre otras cosas, a la trigonometría, muy útil para el levantamiento de planos, la navegación y la astronomía.

El anterior es sólo un ejemplo de los procesos donde las soluciones a problemas teóricos antiguos se vuelven herramientas prácticas más adelante. El conocimiento empírico inicial se convirtió en materia de reflexión para generar niveles más elevados de conocimiento. Si aplicamos el punto de vista de las matemáticas como una actividad, podemos llegar a la conclusión de que reflexionar sobre problemas de geometría práctica sí es matemáticas, lo cual todavía nos deja por responder la primera pregunta: "¿Es geometría?". Para contestarla veamos el análisis de Van Hiele sobre la enseñanza de la geometría.

La teoría del nivel de Van Hiele

Según Van Hiele (1973, 1985), la enseñanza de la geometría se ha apartado mucho de la tradición. A pesar de que él estudió los problemas instructivos en una época en la cual la geometría deductiva todavía formaba parte del programa central de la educación secundaria holandesa, su análisis sobre los problemas didácticos que surgen con este tipo de enseñanza todavía resulta útil para demostrar la importancia de una introducción menos formal.

Van Hiele sostiene que hay una brecha comunicativa entre el maestro y el estudiante, la cual ilustra a través de sus respectivas interpretaciones sobre el concepto geométrico de un "rombo". El decir "Esta figura es un rombo", puede significar cosas muy diferentes para el maestro y para los alumnos.

Cuadrado. *Cuadrado visto como un rombo.*

[1] Es un cuento de hadas, pues la referencia más antigua de este hecho es apenas de hace un siglo; aunque los egipcios conocían y aplicaban mucha geometría [illegible] no hay pruebas de que conocieran este caso especial del teorema de [illegible] (Freudenthal, 1986).

Digitalizado por: I.S.C. Hèctor Alberto Turrubiartes Cerino
hturrubiartes@beceneslp.edu.mx

El estudiante puede reconocer la forma y asociarla con el nombre "rombo". Para los estudiantes que lo hacen así, tal vez sea difícil ver a un cuadrado como un rombo, a menos que el cuadrado se coloque en otra posición. Para un matemático, al igual que para un maestro de matemáticas, la etiqueta "rombo" tiene completamente otro significado. Se refiere a una colección más o menos grande de propiedades y relaciones como:

- Es un polígono.
- Todos los lados tienen la misma longitud.
- Es un paralelogramo.
- Los lados opuestos son paralelos.
- Las diagonales son perpendiculares, etcétera.

Con estas propiedades el maestro puede incluir al cuadrado entre los rombos. Sin embargo, incluso un dibujo a mano cuyos lados aparentan ser aproximadamente iguales y paralelos se aceptará como un rombo. El maestro y el estudiante difieren sobre su marco de referencia y estas diferencias conceptuales bloquean su comunicación ya que las mismas palabras no tienen el mismo significado para ambos. Por lo tanto, tenemos diferentes marcos de referencia con efectos sobre diferentes niveles conceptuales y la única forma de lidiar con el problema es construir el marco de referencia necesario en el nivel conceptual más bajo.

De hecho, Van Hiele distingue tres niveles conceptuales en el proceso de aprendizaje de la geometría. Al nivel conceptual del maestro, las palabras como "rombo", "lado", "ángulo", "cuadrado", etcétera. establecen enlaces en un marco donde cada uno de ellos está constituido por varias propiedades. Esto es lo que Van Hiele llama el *segundo nivel*. Sin embargo, no existe un marco similar en los niveles *primero* o *cero*, cuando las etiquetas siguen conectadas a las experiencias concretas y a los objetos perceptuales.

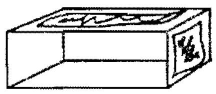
No obstante, en el *tercer nivel* las relaciones se convierten en el objeto de razonamiento: se establecen las propiedades de las relaciones y las conexiones entre dichas propiedades, lo cual hace posible la construcción de un sistema lógico.

De acuerdo con esta descripción, se puede afirmar que la antigua geometría deductiva holandesa en la educación secundaria empezaba en el tercer nivel, en vez de en el primero, con actividades y problemas concretos. Es más, el significado de *concreto* depende del conocimiento que el estudiante haya adquirido a través de su propia experiencia. En otras palabras, no se deben manejar conceptos absolutos, ya que cada sujeto tiene sus propios tres niveles. A pesar de que los conceptos como punto, línea y ángulo pueden ser concretos para los estudiantes de secundaria, el conocimiento de éstos puede convertirse en un conocimiento de segundo o tercer nivel tan pronto como se pase de la geometría tradicional a la orientación en el espacio.

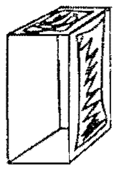
Teoría de enseñanza realista

No obstante, los niveles de Van Hiele pueden ayudar a establecer la macroestructura de un curso. Para esto, utilizaremos la descripción de Treffers (1987) que distinguió entre el *nivel fenomenológico intuitivo*, el *nivel descriptivo localmente* y el *nivel de sistemática de tema*. Se requiere, además de esta macroestructura, una estructura microdidáctica. Los orígenes se encuentran en la fenomenología didáctica de Freudenthal (1983) y el principio de reinvención,[2] y se define por la relación entre la reflexión y la transición a microniveles más altos, donde, como se mencionó anteriormente, *las soluciones a los problemas de un periodo anterior se convierten en las herramientas del siguiente periodo*. La fuerza que mueve a esto es una actitud reflexiva que puede desarrollarse a través de la enseñanza de la geometría realista. Podemos explotar la fuerza intrigante de la geometría para estimular este aspecto de la actitud matemática. La geometría realista nos brinda la gran oportunidad de desarrollarla gracias a la vasta cantidad de conocimiento geométrico informal que tienen los niños pequeños. Se puede ver una muestra de este tipo de enseñanza a través de unas cuantas actividades propuestas en una serie de libros de texto realistas para la escuela primaria (Gravemeijer, 1983).

Para empezar, se realiza una actividad con tapas de cajas de cerillos que se utilizarán como cámaras. El estudiante debe tomar una foto de la maestra que la muestre de cuerpo entero. A través de la experimentación, notará la diferencia que hay si la cámara se sostiene de esta manera

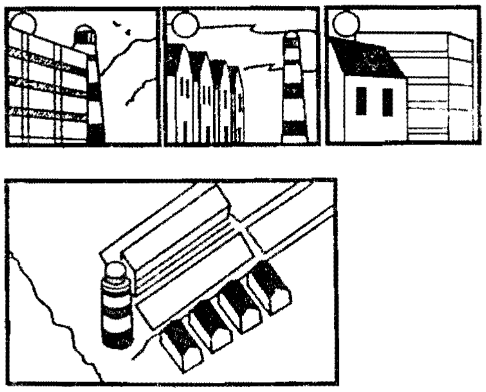


o de esta otra



y, en especial, la diferencia que habrá si se para cerca o lejos de ella.

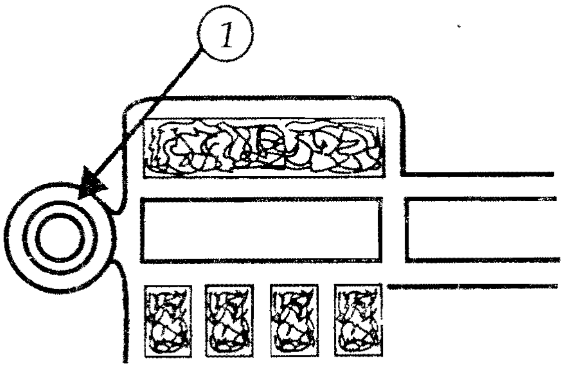
En la siguiente lección se presenta una vista aérea de un sitio junto con unos dibujos del mismo lugar. Los estudiantes deberán determinar, para cada dibujo, dónde estaba colocado el fotógrafo.



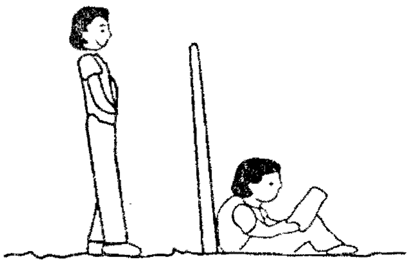
---

[2] Véase Gravemeijer (1990).

Los niños que resolverán este problema pueden hacer una simulación que les sirva para comprobar sus ideas o para tratar de averiguar cuál es la respuesta. Al reconstruir el punto de vista del fotógrafo, los estudiantes pueden, de manera implícita, hacer sus líneas de visión.



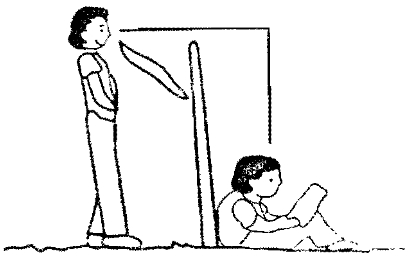
Más adelante se pueden introducir este tipo de líneas de manera más explícita con problemas como el siguiente:



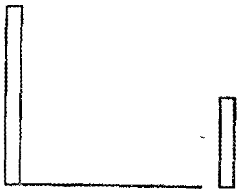
¿Puede ver el tío José a Marco?

Horacio (un estudiante de siete años), al enfrentar esta pregunta, razonó: "No, no puede, porque no puede ver así", y dibujó una línea curva.

"Tampoco puede ver a través de la pared", añadió y dibujó una línea que representaba el rayo de luz reflejado por la pared.



Se puede hacer también el siguiente ejercicio:

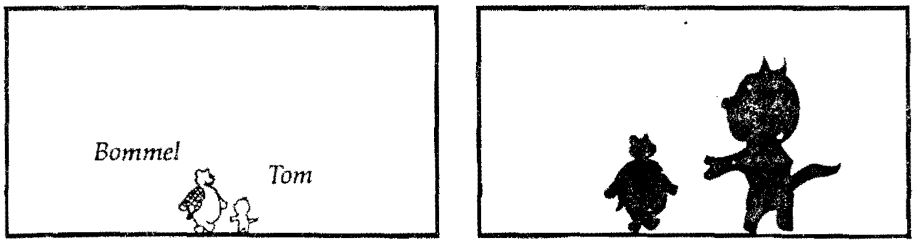


Dibuja la sombra del segundo palo.

Las sombras se pueden comparar dibujando líneas paralelas, pero uno también puede razonar que, en la luz del sol, un palo dos veces más chico da una sombra dos veces más pequeña. La combinación de estas dos maneras de pensar es la base intuitiva para entender las razones invariables en triángulos similares.

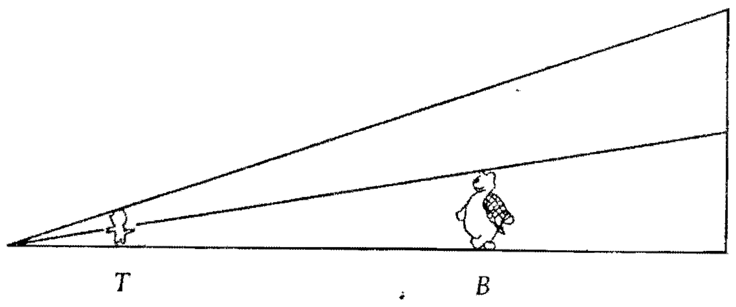
Con otras fuentes de luz, las cosas pueden resultar diferentes, como se ve en una tira cómica con el Oso Bommel y el Gato Tom

El enano Barribal utiliza las sombras para verse más grande de lo que es. Explica cómo hace esto.



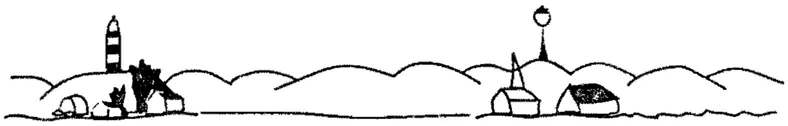
A pesar de que Bommel es más grande que Tom, sus sombras no se comportan de la misma manera.

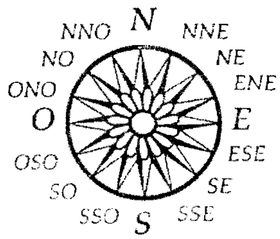
Se puede utilizar una vista lateral para explicar el tamaño de las sombras.



Con el tiempo, el modelo de la sombra evolucionará en un modelo triangular más sofisticado, donde no sean necesarias las referencias a las sombras para poder pensar sobre la relación fija entre la forma de un triángulo rectángulo y la razón de sus lados.

Esto puede utilizarse en todo tipo de problemas. Por ejemplo:





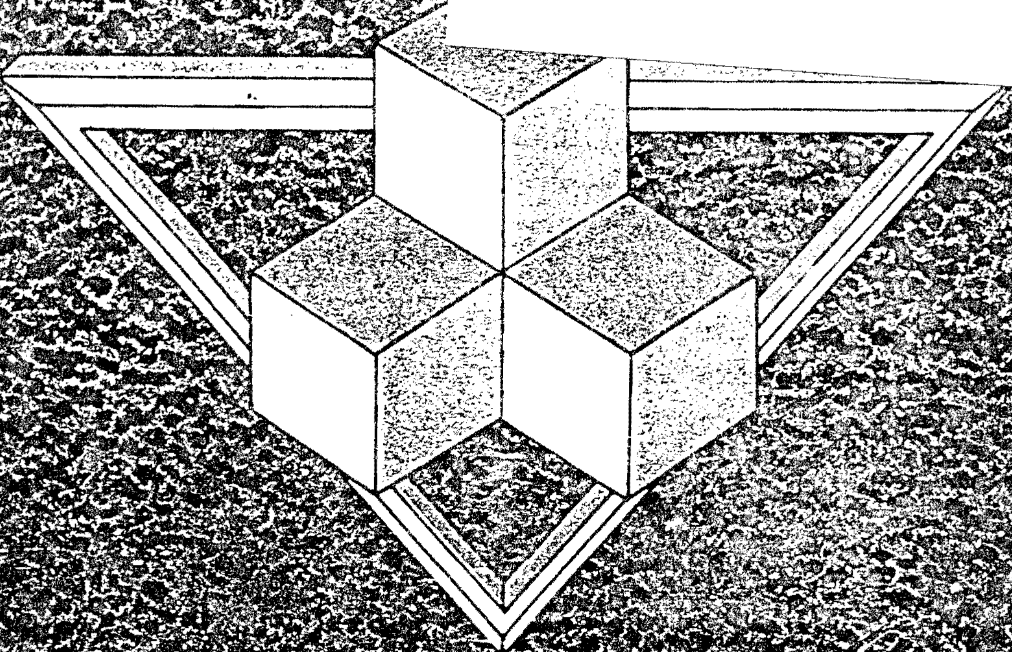
Una parte de la costa de Oaxaca va exactamente de norte a sur.
El puerto de San José está al norte y un poco más al sur se encuentra el puerto de Las Jacarandas.
Un día, el guardacostas de San José ve una señal de emergencia en dirección al oeste-suroeste.
Desde Las Jacarandas, se observa la misma señal frente a la costa, es decir, al oeste.
Haz un dibujo de la situación (un mapa).
La distancia entre San José y Las Jacarandas es de 3 km. ¿Qué tan lejos de la costa está el barco?

No es necesaria la trigonometría para resolver este problema. Simplemente hay que dibujar lo que se sabe y encontrar la distancia a través de la medición [illegible]

Educación Mate

Procesos Cognitivos

Vol. 3 - No



Gutiérrez, A. y Jaime, A., "El modelo de razonamiento de Van Hiele como marco para el aprendizaje comprensivo de la geometría. Un ejemplo: Los Giros", en *Educación matemática,* vol. 3, núm. 2, agosto, México, Grupo Editorial Iberoamérica. 1991, pp. 49-65.

Grupo Editorial Iberoamérica

■ EDUCACIÓN MATEMÁTICA ■ Vol. 3 - No. 2 • Agosto 1991 ■ © GEI ■ Pág. 49 ■

El modelo de Razonamiento de Van Hiele como marco para el aprendizaje comprensivo de la Geometría. Un ejemplo: Los Giros.

A lo largo de este artículo queremos ofrecer una visión general que sirva de toma de contacto con el "Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele". Como indica su nombre, esta teoría de aprendizaje describe las formas de razonamiento de los estudiantes de Geometría. Aunque puede pensarse que el tipo de razonamiento es el mismo en cualquier parte de las Matemáticas, esto no es del todo cierto, pues las características propias de las distintas áreas (Aritmética, Algebra, Geometría, etc.) marcan notables diferencias; de hecho, ha habido intentos de aplicar el Modelo de Van Hiele fuera de la Geometría, pero en general han tenido escaso éxito. El objetivo principal de estas páginas es acercar esta teoría a los profesores de Matemáticas y a su práctica cotidiana, con el fin de que les pueda servir como orientación en el diseño de las actuaciones (suyas y de sus alumnos) en las clases de Geometría a lo largo del curso. En la primera sección haremos una descripción de las principales características del Modelo de Van Hiele y después ofreceremos un ejemplo de su aplicación a una unidad de enseñanza concreta.

Es interesante conocer su orígen. Sus autores son los esposos Pierre M. Van Hiele y Dina Van Hiele-Geldof, que en los años 50 eran profesores de Geometría de enseñanza secundaria en Holanda. A partir de su experiencia docente y de las dificultades de comprensión que observaban en sus alumnos, elaboraron un modelo que explica, por una parte, cómo se produce la evolución del razonamiento geométrico de los estudiantes y, por otra parte, cómo puede un profesor ayudar a sus alum-

Ángel Gutiérrez y Adela Jaime

Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Valencia España

nos para que mejoren la calidad de su razonamiento. Esta teoría la exponen por primera vez en sus tesis doctorales, leídas en 1957 y dirigidas por el recientemente fallecido H. Freudenthal (Hiele, 1990 y Hiele-Geldof, 1984).

El Modelo de Van Hiele atrajo enseguida la atención de los educadores soviéticos, que se hallaban inmersos en un proyecto de reforma curricular. Tras unos años de intensas investigaciones y exprimentaciones, se incorpora el Modelo de Van Hiele como base teórica de la elaboración del nuevo currículum de enseñanza de la Geometría en la U.R.S.S., cuya implantación definitiva se produce en 1964. Un ejemplo de los resultados soviéticos lo tenemos en Pyskalo (1968). Por el contrario, en los países occidentales (con excepción de Holanda) se siguió ignorando el Modelo de Van Hiele hasta que I. Wirszup da una conferencia en la reunión anual del N.C.T.M. (Wirszup, 1976) en la que hace una descripción del curriculum soviético y del Modelo de Van Hiele y alerta a los profesores estadounidenses ante el hecho de que el curriculum de Geometría soviético es más eficaz que el suyo. La reacción provocada hace que en los años siguientes se realicen diversas investigaciones en EE.UU. en torno al Modelo de Van Hiele y que éste sea objeto de interés creciente en todo el mundo, tanto desde el punto de vista de la investigación educativa como del de la práctica docente.

Empezaremos describiendo el Modelo de Van Hiele. Está formado por dos partes: La primera es la descripción de los distintos tipos de razonamiento geométrico de los estudiantes a lo largo de su formación matemática, que van desde el razonamiento visual de los niños de preescolar hasta el formal y abstracto de los estudiantes de las facultades de Ciencias; estos tipos de razonamiento se denominan los *niveles de razonamiento*. La segunda parte es una descripción de cómo puede un profesor organizar la actividad en sus clases para que los alumnos sean capaces de acceder al nivel de razonamiento superior al que tienen actualmente; se trata de las *fases de aprendizaje*. En esta exposición abordaremos ambas componentes: En primer lugar nos ocuparemos de los niveles de razonamiento, que forman la base teórica del Modelo, y después nos centraremos en las fases de aprendizaje y en la aplicación del Modelo al diseño de series de actividades para temas concretos de clase.

En la bibliografía existente (en Gutiérrez, Jaime (1989) ofrecemos una recopilación comentada) se pueden encontrar listas muy completas de características de los distintos niveles de Van Hiele. En dichas publicaciones se utilizan dos numeraciones de los cinco niveles, empezando en 0 y empezando en 1; nosotros preferimos la segunda, para mantener las etiquetas de los niveles de acuerdo con sus ordinales. Las siguientes son las propiedades más importantes que permiten caracterizar con claridad cada nivel y diferenciarlo de sus adyacentes:

Nivel 1 (reconocimiento): El estudiante de este nivel

* Percibe los objetos en su totalidad y como unidades.
* Describe los objetos por su aspecto físico y los diferencia o clasifica en base a semejanzas o diferencias físicas globales entre ellos.
* No reconoce explícitamente las componentes y propiedades de los objetos.

Nivel 2 (análisis): El estudiante de este nivel

* Percibe los objetos formados por partes y dotados de propiedades, aunque no identifica las relaciones entre ellas.
* Puede describir los objetos de manera informal, mediante el reconocimiento

140

sus componentes y propiedades, pero no es capaz de hacer clasificaciones lógicas.

* Deduce nuevas relaciones entre componentes o nuevas propiedades de manera informal a partir de la experimentación.

Nivel 3 (clasificación): El estudiante de este nivel

* Realiza clasificaciones lógicas de los objetos y descubre nuevas propiedades en base a propiedades o relaciones ya conocidas y por medio de razonamiento informal.
* Describe las figuras de manera formal, es decir que comprende el papel de las definiciones y los requisitos de una definición correcta.
* Comprende los pasos individuales de un razonamiento lógico de forma aislada, pero no comprende el encadenamiento de estos pasos ni la estructura de una demostración.
* No es capaz de realizar razonamientos lógicos formales, ni siente su necesidad. Por este motivo, tampoco comprende la estructura axiomática de las Matemáticas.

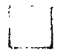
Nivel 4 (deducción): El estudiante de este nivel

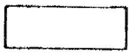
* Es capaz de realizar razonamientos lógicos formales.
* Comprende la estructura axiomática de las Matemáticas.
* Acepta la posibilidad de llegar al mismo resultado desde distintas premisas (definiciones equivalentes, etc.).

En la descripción inicial del Modelo (Hiele, 1986) se señala la existencia de un quinto nivel, cuya característica básica es la capacidad para manejar, analizar y comparar diferentes Geometrías. Desde el primer momento, las investigaciones han mostrado una inconsistencia de este nivel con los cuatro anteriores. Por otra parte, la presencia de este nivel apenas aporta nada, desde un punto de vista práctico al Modelo, ya que sólo se encontraría al alcance de los matemáticos profesionales y de algunos estudiantes adelantados de las facultades de Matemáticas. Por este motivo, en adelante vamos a considerar solamente los niveles 1 al 4, que sí podemos encontrar en nuestros alumnos de los diferentes niveles educativos si reciben una enseñanza adecuada.

Después de esta descripción global, y por lo tanto abstracta, de las características de los niveles de razonamiento de Van Hiele, vamos a centrarnos en un ejemplo concreto de particularización de dicha descripción. Hemos recurrido a los cuadriláteros porque esta familia de polígonos constituye una parte de las Matemáticas y presenta una estructura muy rica en relaciones. Veamos las características que identifican la forma de trabajar con cuadriláteros de alumnos situados en los diferentes niveles de razonamiento.

Nivel 1: El estudiante de este nivel

* identifica cuadrados, rombos, rectángulos, etc. por su aspecto [illegible] ción. Por ejemplo,  es un cuadrado pero, después de girarlo, 
* considera cada clase de cuadriláteros diferente (disjunta) de las demás. También considera como pertenecientes a diferentes clases algunos polígonos

con formas muy diferenciadas, como, por ejemplo,  y 

* puede dibujar, recortar, etc. los diferentes tipos de cuadriláteros, así como reconocerlos en diferentes contextos.

Nivel 2: El estudiante de este nivel

* Identifica, por ejemplo, un rectángulo como un polígono dotado de un número de propiedades matemáticas: tiene 4 lados paralelos dos a dos, con 4 ángulos rectos, con diagonales iguales, que se cortan en el punto medio, etc., pero no se da cuenta de que unas propiedades están relacionadas con las otras (se deducen de ellas).
* no es capaz de dar una definición de rectángulo, es decir un conjunto mínimo de propiedades que lo caracterice.
* no es capaz de relacionar inclusivamente los diferentes tipos de cuadriláteros, sino que los sigue percibiendo como clases disjuntas. Por ejemplo, dirá que "un cuadrado no puede ser un rectángulo porque los cuadrados tienen todos los lados iguales y en los rectángulos dos lados miden más que los otros dos".

Nivel 3: El estudiante de este nivel

* clasifica los cuadriláteros a partir de sus propiedades: Ya reconoce que cualquier cuadrado es un rectángulo pero que no todos los rectángulos son cuadrados, etc.
* puede deducir, basado en argumentos *informales,* unas propiedades a partir de otras. Por ejemplo, paralelismo → igualdad de lados, perpendicularidad → paralelismo de lados opuestos, etc.

Nivel 4: El estudiante de este nivel

* maneja las propiedades de los cuadriláteros y las relaciona dentro de un contexto formal. Por ejemplo, puede demostrar formalmente cualquiera de los teoremas que ya ha utilizado en el nivel 3, o propiedades nuevas, como que la suma de los ángulos de un cuadrilátero es 360°.
* puede comprender la existencia de diferentes definiciones de una figura, analizarlas y relacionarlas. Por ejemplo:

— Un rectángulo es un cuadrilátero que tiene los ángulos rectos.

— Un rectángulo es un cuadrilatero cuyas diagonales son iguales y se cortan en sus puntos medios.

— Un rectángulo es un cuadrilatero que tiene los lados paralelos dos a dos y un ángulo recto.

La descripción antérior de los niveles de razonamiento pone de relieve diversas propiedades del Modelo de Van Hiele, cuya importancia práctica radica en que muestran las líneas básicas que debe seguir un profesor que desee fundamentar sus clases en este modelo de enseñanza. Estas propiedades, de las cuales damos una descripción más detallada en Jaime, Gutiérrez (1990), son:

Recursividad: Los elementos implícitos en el razonamiento del nivel N se hacen explícitos en el razonamiento del nivel N + 1.

142

Por ejemplo, un niño de pre-escolar puede diferenciar círculos, triángulos y rectángulos por la "forma" de las figuras (nivel 1); no obstante es evidente que el niño se fija en la existencia y la forma (o cantidad) de los vértices para esa clasificación, aunque no sea consciente de ello. Más adelante, cuando el niño haya alcanzado el nivel 2, sí será consciente de que los vértices, como elementos diferenciados, son la clave de la clasificación.

La tabla siguiente resume esta característica:

	Elementos explícitos	Elementos implícitos
Niv. 1	objetos geométricos	propiedades matem. de los objetos
Niv. 2	prop. mat. de los objetos	relaciones entre propiedades y/o elementos de los objetos
Niv. 3	relac. entre prop. y/o elem.	deducción formal de relaciones
Niv. 4	deduc. formal de relaciones	

En este contexto, el trabajo central del profesor es conseguir que sus alumnos lleguen a ser conscientes del uso que están haciendo de esos elementos implícitos de su razonamiento y aprendan a utilizarlos de manera voluntaria. Este uso voluntario y correcto es lo que les permitirá alcanzar el nivel de razonamiento superior.

Secuencialidad: No es posible alterar el orden de adquisición de los niveles, es decir que no se puede alcanzar un nivel de razonamiento sin antes haber superado, de forma ordenada, todos los niveles inferiores.

Un peligro del aprendizaje memorístico es que los estudiantes aparentan un nivel de razonamiento superior al que realmente tienen porque han aprendido vocabulario y formas de trabajo propios del nivel superior, aunque realmente no los comprenden ni los saben utilizar correctamente. Un ejemplo muy frecuente lo tenemos en los estudiantes de Enseñanza Secundaria cuando los profesores les enseñan matemáticas formales y les piden que repitan las demostraciones o que resuelvan formalmente problemas; esta práctica se traduce en que, con el paso del tiempo, los estudiantes han aprendido mecánicamente ciertas formas de actuar y de contestar los ejercicios propias del lenguaje matemático formalizado, con las que dan la impresión de encontrarse en el 4º nivel, cuando en realidad están muy lejos de ese tipo de razonamiento.

Especificidad del lenguaje: Cada nivel lleva asociado un tipo de lenguaje para comunicarse y un significado específico del vocabulario matemático, de forma que dos personas que utilicen lenguajes de diferentes niveles no podrán entenderse. Por ejemplo, la palabra "demostrar" tiene [illegible] diferentes en los niveles 2, 3 y 4, pues para demostrar una propiedad [illegible] tudiante del nivel 2 [illegible] cumple en uno o varios ejemplos [illegible] bastará para convencerle; un estudiante del nivel 3 sabe que debe dar justificaciones generales, pero éstas se basarán en algún ejemplo o en manipulaciones físicas de los cuerpos. Un

143

estudiante del nivel 4 hará una demostración formal.

Son evidentes las implicaciones de esta propiedad en la forma de comportarse los profesores en las aulas. Con esto, Van Hiele nos avisa de que si queremos que nuestros alumnos nos entiendan realmente, debemos situarnos en su nivel, en vez de pretender que ellos se sitúen en el nuestro.

Continuidad: Nuestra experiencia personal nos dice que el tránsito entre los niveles de Van Hiele se produce de forma contínua y pausada, pudiendo durar varios años en el caso de los niveles 3 y 4. Dado que las características de cada nivel de razonamiento son múltiples, es necesario preguntarse cómo hay que tratar a los estudiantes que presentan indicios de haber adquirido algunas características de un nivel y también de no haber adquirido otras.

Localidad: Por lo general, un estudiante no se encuentra en el mismo nivel de razonamiento en cualquier área de la Geometría, pues el aprendizaje previo y los conocimientos que tenga son un elemento básico en su habilidad de razonamiento.

Los que hemos estudiado Matemáticas superiores sabemos que, al enfrentarnos con una nueva área de estudio, lo usual es empezar tomando contacto con los elementos más importantes, después con sus propiedades básicas, a continuación relacionar unos elementos o propiedades con otros, etc. En otras palabras, lo usual es recorrer (posiblemente de forma muy rápida) los niveles de Van Hiele desde el 1 en adelante. Por lo tanto, cremos que los niveles de razonamiento son de carácter local y que la "localidad" es más acusada cuanto más bajo es el nivel, pues a menor nivel de razonamiento menor es la capacidad de lo alumnos para globalizar sus conocimientos y abarcar un área amplia de la Geometría.

El Modelo de Van Hiele propone a los profesores una secuencia cíclica de cinco fases de aprendizaje para ayudar a los estudiantes a progresar desde un nivel de pensamiento al siguiente. Básicamente, estas cinco fases constituyen un esquema para organizar la enseñanza. Su carácter cíclico viene dado por el hecho de que cuando los estudiantes, tras recorrer las cinco fases, consiguen alcanzar un nivel de razonamiento superior al que tenían, deben iniciar un nuevo recorrido por las cinco fases para conseguir llegar al nivel superior al actual. Naturalmente, aunque las fases son las mismas para todos los niveles, los contenidos matemáticos, el lenguaje empleado y la forma de resolver los problemas son diferentes para cada nivel; lo que permanece es la metodología de trabajo, pero cambia su contenido concreto. Las fases del Modelo de Van Hiele son las siguientes:

Información: Al empezar a estudiar un tema nuevo, el profesor debe informar a los estudiantes sobre cuál es el campo de investigación en el que van a trabajar y cuáles van a ser los problemas que van a tratar de resolver. Esta fase sirve también para que el profesor averigüe los conocimientos previos de sus alumnos sobre ese tema y, en caso de que tengan algunos conocimientos organizados, cuál es su calidad y en qué nivel de razonamiento son capaces de desenvolverse los estudiantes.

En todo caso, no hay que despreciar los conocimientos que puedan haber adquirido los estudiantes de forma extra-académica, pues si son adecuados deben servir como punto de partida y si son erróneos, el profesor debe empezar por modificar esos errores.

Orientación dirigida: En la segunda fase los estudiantes exploran el campo de investigación por medio del material que les ha suministrado el profesor. Este material suele estar formado por bloques de actividades dirigidos al descubrimiento y aprendizaje de los conceptos y propiedades fundamentales del área de estudio en cuestión. Estas actividades deben estar claramente orien-

144

tadas hacia sus objetivos, por ejemplo mediante ciertas cuestiones o directrices dadas por el profesor (como doblar, medir, buscar una simetría, etc), de tal forma que las estructuras características se le presenten a los estudiantes de forma progresiva.

Explicitación: La tercera fase, que es fundamentalmente de diálogo entre los estudiantes, con intervenciones del profesor cuando sea necesario, tiene varios objetivos. Uno es conseguir que las experiencias adquiridas se unan a los símbolos lingüísticos precisos y que los estudiantes aprendan a expresarse con precisión (dentro de las características de su nivel de razonamiento) en el transcurso de discusiones que tienen lugar en el aula.

Otro objetivo es hacer que los estudiantes reflexionen "en voz alta" sobre el trabajo que han estado haciendo, sus soluciones, dificultades, métodos, etc. Este debate entre los compañeros enriquecerá notablemente el conocimiento de cada estudiante, pues les obliga a organizar sus ideas y expresarlas con rigor, pone de relieve los métodos y resultados incorrectos y afianza los correctos. Así, en el transcurso de la tercera fase se forma parcialmente la nueva red de relaciones entre los conceptos propios del área de estudio.

Orientación libre: Ahora los estudiantes tendrán que aplicar sus nuevos conocimientos a investigaciones posteriores sobre el tema de estudio. Este es en gran parte conocido, pero el alumno todavía debe afianzar y completar sus conocimientos del mismo. Esto se consigue mediante la asignación por el profesor de tareas que, preferiblemente, puedan desarrollarse de diversas formas o que puedan llevar a diferentes soluciones. Se trata de actividades y problemas menos dirigidos que los que se plantean en la segunda fase, pues en aquel momento los problemas estaban dirigidos a enseñar unos conocimientos concretos, mientras que en la fase de orientación libre la finalidad de las actividades de los estudiantes es conseguir que profundicen en dichos conocimientos, que se afiancen en su uso, que relacionen unos con otros y que descubran y aprendan algunas propiedades que por su complejidad no pueden ser estudiadas antes.

Integración: A lo largo de las fases anteriores, los estudiantes han adquirido nuevos conocimientos y habilidades de razonamiento, pero todavía les falta adquirir una visión general de los conceptos y métodos que tienen a su disposición. En esta fase el profesor debe tratar de resumir en un todo el campo que han explorado los estudiantes y lograr que integren lo que acaban de aprender en la red de conocimientos relacionados con este campo que pudieran tener con antelación. El profesor puede fomentar este trabajo proporcionando comprensiones globales, pero es importante que estas comprensiones no le aporten ninguna novedad al estudiante: Solamente deben ser una acumulación de las cosas que ya conoce.

Es fácil darse cuenta de que las fases de aprendizaje tienen, por los objetivos de cada una, una secuenciación lógica que no se puede alterar. La única excepción es la tercera fase, de explicitación; esta fase no debe consistir en un período de tiempo entre las fases segunda y cuarta dedicado a que los estudiantes dialoguen, sino que hay que entenderla como una dinámica continua, a lo largo de todas las clases, de diálogo y de reflexión común después de cualquier tipo de actividad, sea en la fase que sea. De esta manera la fase de explicitación estaría sobrevolando las otras cuatro fases y [illegible] con cada una de ellas.

Asimismo, si el profesor y los alumnos han estado trabajando juntos un tema con anterioridad, puede que la fase 1 de un determinado nivel no requiera actividades específicas, pues el profe-

145

sor ya sabe qué conocimientos y nivel de razonamiento tienen sus alumnos y es suficiente hacer algunos comentarios o preguntas para re-tomar el tema y comenzar con las actividades de la fase 2.

Para completar esta presentación del Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele, vamos a dar un ejemplo de su aplicación al diseño de una unidad de enseñanza de los giros del plano (esta unidad es parte de un proyecto más amplio cuyo objetivo es el diseño de unidades para la enseñanza de las isometrías del plano).

Antes de iniciar el diseño de una unidad de enseñanza para un tema concreto de Geometría, hay que particularizar el significado general de los niveles de Van Hiele, que hemos visto al principio del artículo, definiendo características de cada nivel de razonamiento en términos del tema en cuestión. En nuestro caso, las características de los niveles de razonamiento particularizadas a los giros del plano son:

Nivel 1 (reconocimiento): El estudiante de este nivel

* Reconoce, utiliza y describe los giros por sus características visuales globales.
* Utiliza la disposición en forma de círculo, la equidistancia al centro y la variación en la inclinación, pero lo hace de una forma global, es decir, según el aspecto general de la figura que ve.

Nivel 2 (análisis): El estudiante de este nivel

* Reconoce y utiliza los giros a partir de sus dos características básicas: Centro y ángulo de giro. La visión global del primer nivel ha dado paso a una consideración de los elementos. Por ejemplo: Para colocar la imagen de una figura, el estudiante tiene en cuenta la equidistancia al centro de varios de sus puntos (generalmente trazando circunferencias) y reconoce la necesidad de utilizar más de un punto.
* Descubre experimentalmente y utiliza propiedades de los giros, como la igualdad del ángulo recorrido por distintos puntos de una figura, las particularidades de los giros de 180°, la equivalencia de giros, el resultado del producto de giros con el mismo centro.

Nivel 3 (clasificación): El estudiante de este nivel

* Establece relaciones entre propiedades descubiertas anteriormente, lo cual le permite realizar demostraciones informales y descubrir propiedades nuevas. Por ejemplo:
  — Obtiene y justifica el procedimiento de cálculo del centro de giro mediante el corte de dos mediatrices.
  — Descubre la relación entre el ángulo de giro y la inclinación de la figura imagen respecto de la original (fig. 1) y la utiliza para justificar el resultado del producto de giros de distinto centro.
  — Relaciona traslaciones o simetrías con giros.[1]

[1] El desarrollo de este punto depende del nivel de razonamiento que los estudiantes hayan alcanzado previamente en el estudio de las traslaciones o las simetrías.

146

* Comprende la definición formal de giro y reconoce y utiliza conjuntos mínimos de condiciones necesarias y suficientes para definir un giro.

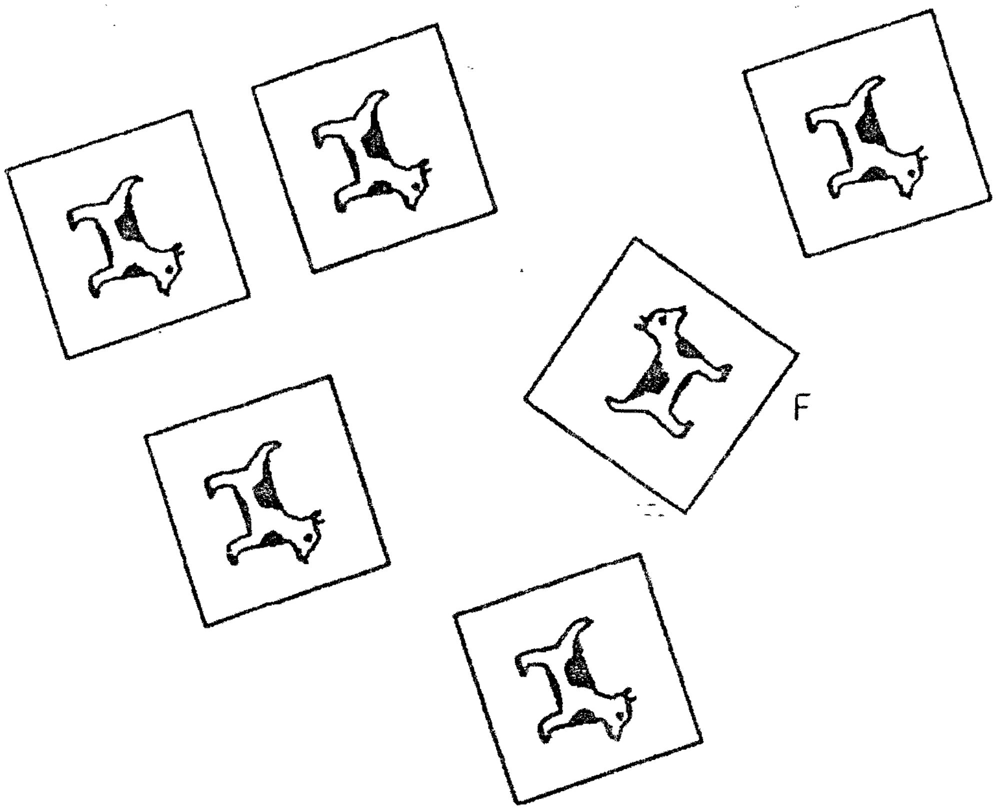


Figura 1
Giros con el mismo ángulo y distintos centros aplicados a F. Se observa que todas las imágenes son trasladadas entre sí.

Nivel 4 (deducción): El estudiante de este nivel

* Comprende y utiliza los métodos formales de razonamiento: Es capaz de emplear y enunciar las propiedades en términos de hipótesis y tesis y encadenar lógicamente los pasos seguidos en el razonamiento.
* Puede realizar demostraciones formales de las propiedades conocidas o de otras nuevas.
* Consigue una integración de la estructura global de las isometrías del plano.[2] Utiliza la estructura algebraica de dicho conjunto.

Un desarrollo completo de este nivel de razonamiento en los gir[illegible] la integración de las otras isometrías (al menos de las simples: Traslaciones y simetrías. No es necesario [illegible] rrollado la simetría en des[illegible] pues al efectuar productos, estos movimientos se encuentran estrechamente

[2] Después de haber llegado a este nivel en el estudio de las traslaciones y las simetrías.

vinculados. Por ello, a partir del nivel 3 de razonamiento en giros consideramos necesario que los alumnos hayan desarrollado una instrucción semejante en traslaciones y simetrías. Esto se refleja en la secuencia de actividades que proponemos, pues a partir del nivel 3 aparecen situaciones en las que traslaciones y simetrías se relacionan con los giros.

Una vez caracterizados los niveles en términos de giros, podemos empezar el diseño de la unidad de enseñanza. Por limitaciones de espacio, no haremos una exposición completa de las actividades a realizar en cada nivel, sino que indicaremos tipos de actividades integrados en esta unidad de enseñanza, a lo largo de las diferentes fases y niveles de razonamiento. Por otra parte, de acuerdo con la interpretación que dimos más arriba de la fase 3, como una actitud continua de diálogo durante las demás fases, no hemos diseñado actividades específicas para esta fase en ninguno de los niveles.

Desde el punto de vista metodológico, es necesario resaltar que hay que contemplar las actividades dentro del contexto de la secuencia concreta en la que se encuentran, pues una actividad aislada puede utilizarse en distintas fases, e incluso distintos niveles. Su situación concreta dentro del conjunto es lo que marca sus objetivos. Por ejemplo, ante una actividad dirigida a que los estudiantes descubran una propiedad, si en una secuencia se sitúa como actividad de la fase 2, su objetivo será el descubrimiento directo de la propiedad, mientras que si la pretensión es que la actividad corresponda a la fase 4, deberá surgir como aplicación de otras ya conocidas por los estudiantes.

La unidad de enseñanza que presentamos está dirigida a estudiantes de Enseñanza Primaria y comienzo de la Enseñanza Secundaria (grados 3 a 11, con edades entre 9 y 16 años aproximadamente) y a estudiantes de la Escuela de Magisterio (futuros profesores de Enseñanza Primaria).

El material que utilizamos para las actividades está formado por los elementos usuales de dibujo (regla, compás y transportador), por discos de plástico transparente y por pequeñas figuras de papel de varias formas (cuadrados, rectángulos, triángulos y rombos), con un dibujo en su interior (fig. 2); los alumnos disponen de cantidad suficiente de estas figuras, bien para realizar físicamente los movimientos, bien para pegarlas en la posición de la imagen por el giro. Con ello pretendemos evitar posibles errores ocasionados por un mal dibujo. También se agiliza de esa manera el trabajo, pues siempre es más rápido pegar una figura que dibujarla. De todas maneras, los estudiantes a veces prefieren prescindir de las figuras de papel y dibujarlas.

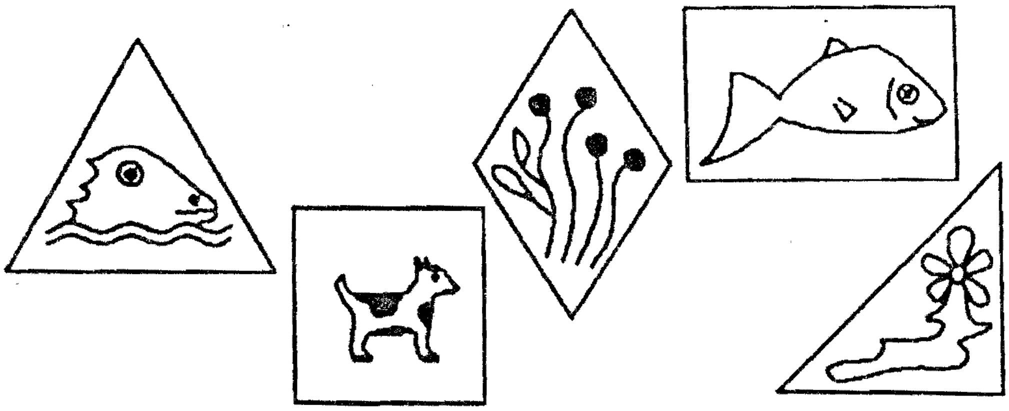


Figura 2

2f) Aplicar giros de 180°, observando sus características especiales en la posición de la figura imagen. Calcular imágenes mediante giros de 180° utilizando sólo la regla (sin compás).

Fase 4

2g) Determinar giros equivalentes. Obtener la condición que han de cumplir dos giros para ser equivalentes.

2h) Componer giros del mismo centro. Generalizar el resultado. Descubrir la conmutatividad.

Construir rosetones generados por un giro (figura 4). Tras la realización de algunos rosetones, los alumnos deben prever la cantidad máxima de figuras que se pueden colocar en un rosetón, conocida la figura que hay que girar.

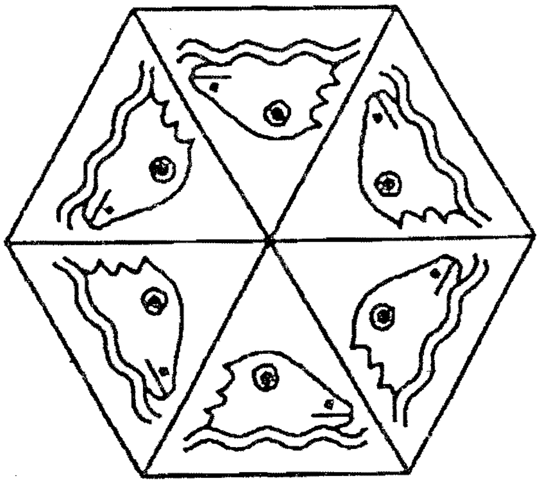


Figura 4

2i) Dados dos puntos P y P' y varios puntos más, encontrar los que sirven como centros de giro que transforman P en P'. Generalizar el resultado describiendo el lugar donde pueden estar otros centros de giros no dados.

Fase 5

Resumen por parte del profesor centrado en: ¿Qué es un giro? ¿Cómo se aplica un giro a una figura? Si obtienes con el compás la imagen de un punto de una figura, ¿cómo colocas la imagen de la figura completa? ¿Es suficiente con la imagen de un punto para colocar bien la imagen de la figura completa? ¿Cuál es el resultado del producto de giros con el mismo centro?

Comentarios: Las actividades de la fase 2 comienzan con la consideración puntual, analítica, de la equidistancia, que se utilizaba visual y globalmente en el nivel 1: Ahora la equidistancia se comprueba midiendo en varios puntos de una figura. El alumno llegará a ser consciente de que no basta con asegurar sólo la equidistancia entre un punto y su imagen, pues se puede colocar la figura imagen con distintas inclinaciones (actividad 2a). La actividad 2b aplica esa idea.

En varias actividades de la fase 2 se van presentando los distintos elementos básicos del concepto de giro: Centro y ángulo de giro, igualdad del ángulo recorrido por los distintos puntos de una figura y equidistancia al centro de cualquier punto y su imagen. Estas actividades son las que permiten obtener de manera consciente, es decir no como un simple algoritmo, la imagen mediante un giro de una figura por el método usual de determinar la imagen de varios puntos con el compás (actividad 2e), sino sabiendo por qué se puede obtener así la imagen de una figura. Las actividades de la fase 2 se completan con la 2f dedicada a estudiar las propiedades peculiares de los giros de 180°.

El conocimiento de los elementos característicos de los giros y la explicitación de sus propiedades más destacadas realizados en la fase 2, les permiten a los alumnos descubrir por sí mismos, en la fase 4, otras propiedades

Fase 2

4c) Realizar las demostraciones de las dos propiedades señaladas en los apartados anteriores 4a) y 4b).

4d) Demostrar que la composición de dos simetrías cuyos ejes se cortan es un giro. Caracterizar dicho giro.

Fase 4

Comprendidas las demostraciones anteriores, en las que el elemento básico es la asimilación de la descomposición de manera adecuada de giros en producto de simetrías, queda todo un campo abierto para demostrar formalmente otro tipo de composiciones. A modo de ejemplo presentamos algunos de los múltiples ejercicios que se pueden plantear.

4e) Demostrar que el producto de dos giros de distinto centro es un giro cuando el valor de la suma de los ángulos de los giros factores no es múltiplo de 360°.

Demostrar cuál es el resultado de la composición de un giro y una traslación.

4f) Demostrar que toda isometría del plano se puede expresar como producto de como máximo tres simetrías.

Una forma más elemental (apropiada para el nivel 3) de estudiar esta propiedad sería la siguiente:

Dadas dos figuras congruentes del plano,

— si son directas, siempre se puede pasar de una a otra mediante una traslación o un giro.

— si son inversas, si no hay una simetría que convierta una en la otra, siempre se puede encontrar la composición de una simetría y un movimiento directo, traslación o giro (si se ha estudiado la simetría en deslizamiento, este caso se reduce a ese movimiento).

Fase 5

En esta fase la visión de los alumnos de las isometrías del plano ya debe ser global, en cuanto que se consideran todos los movimientos relacionados estrechamente entre sí. La labor de resumen en esta fase consiste en destacar tales relaciones. Además si los alumnos han estudiado los movimientos desde otro punto de vista, por ejemplo, el matricial, en esta fase conviene establecer los vínculos correspondientes.

Comentarios: Las actividades propuestas en la fase 1 son una iniciación al planteamiento formal y a la estructura de los teoremas. En el nivel 3 proponíamos estas actividades para afianzar la definición de giro, realizar justificaciones informales de los resultados y repetir, con alguna variación, las demostraciones realizadas por el profesor. Ahora el objetivo es que el alumno enuncie en términos formales las hipótesis y las tesis de dichas propiedades, como paso previo a la organización de sus demostraciones formales.

Las actividades propuestas en la fase 2 tienen como objetivo guiar al estudiante en la realización de una demostración formal completa. La correspondiente a la actividad 4d), junto con una propiedad semejante que relaciona simetrías y traslaciones (el producto de dos simetrías de ejes paralelos es una traslación) son dos pilares básicos en los que se apoyan muchas demostraciones formales de composiciones de movimientos y la estructura algebraica.

Con los conocimientos adquiridos en la fase 2, en las actividades de la fase 4 los alumnos pueden desarrollar razonamientos formales para demostrar otras propiedades.

Referencias

GUTIERREZ, A.; JAIME, A. (1989): Bibliografía sobre el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele, *Enseñanzas de las Ciencias* 7.1, pp. 89-95.

HIELE, P.M., (1986): Structure and insight. A theory of mathematics education (Academic Press: Londres).

HIELE, P.M. (1990): *El problema de la comprensión, en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría*. (De problematiek van het inzicht, gademonstreed aan het inzicht van schoolkinderen in meetkunde-leerstof). (Universidad de Utrecht: Utrecht, Holanda).

HIELE-GELDOF, D. The didactics of geometry in the lower class of secundary school (De didaktiek van de meetkunde in de eerste klas van het V.H.M.O.), en *Fuys; Geddes; Tischler (1984): Selected writings of Dina Van Hiele-Geldof and Pierre M. Van Hiele* (Brooklyn College, C.U.N.Y.: Nueva York), pp. 1-214.

JAIME, A.; GUTIERREZ, A. (1990): Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele, en *Linares Sánchez (1990): Teoría y práctica en eduación matemática* (Alfar: Sevilla, España), pp. 295-384.

PYSKALO, A. M. (1968): *Geometry in grades 1-4 (problems in the formation of geometric conceptions in pupils in the primary grades)*. (Proveshchente Publishing House: Moscú).

WIRSZUP, I. (1976): Breakthroughs in the psychology of learning and teaching geometry, en *Martín (1976): Space and geometry* (ERIC: Columbus, USA), pp. 75-97.

Razonamiento proporcional*

*Richard Lesh, Thomas Post y Merlyn Behr***

El razonamiento proporcional es una forma de razonamiento matemático que incluye el reconocimiento de la covariación y de las comparaciones múltiples, así como la capacidad de guardar y procesar mentalmente información diversa. Está muy relacionado con la interferencia y la predicción, y abarca métodos de pensamiento cualitativos y cuantitativos.

En nuestra investigación se han tomado en consideración las características esenciales del razonamiento proporcional de manera que se incluyen razonamientos sobre la relación holística entre dos expresiones racionales, como índices, razones, cocientes y fracciones. Invariablemente, esto implica la asimilación y síntesis mental de varios componentes de dichas expresiones, así como la capacidad para inferir la igualdad o desigualdad de parejas dentro de una serie de expresiones con base en estas funciones mentales. El proceso también incluye la capacidad de poder encontrar componentes faltantes independientemente de los aspectos numéricos del problema. Dentro del ámbito de la investigación, esta perspectiva no se ha utilizado de manera universal.

No cualquier persona que resuelva un problema con proporciones estará necesariamente utilizando el razonamiento proporcional. De hecho, se podrían notar las simples relaciones numéricas (dado que A es tres veces B, X debe ser tres veces D) o utilizar un algoritmo repetitivo como la multiplicación cruzada. Para resolver las proporciones del tipo $A/B = x/D$, con frecuencia se les enseña a los alumnos el método de la multiplicación cruzada $A * D = x * B$ donde $x = A * D/B$. Sin embargo, la investigación y la experiencia han demostrado que los alumnos *1)* no entienden bien este método (Post, Behr y Lesh, 1988), *2)* no consideran el método de solución como algo "naturalmente generado" (Hart, 1984), y *3)* con frecuencia utilizan este método para evitar el razonamiento proporcional en vez de aprenderlo. En este caso se observa que el procedimiento limita el uso del razonamiento proporcional que no se utiliza como tal en ningún momento. Es por eso que se prefiere hablar de problemas relacionados con la proporción en lugar de problemas de razonamiento proporcional.

---

* "Proportional reasoning", en *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* [*Conceptos numéricos y operaciones en grados intermedios*], 19, pp. 93-118. [Traducción realizada con fines didácticos, no de lucro, para los alumnos de las escuelas normales.]

** Richard Lesh, wicat Systems; Thomas Post, University of Minnesota; Merlyn Berh, Notherm Illinois University.

Consideramos que el concepto del razonamiento proporcional tiene una gran importancia. Por un lado, es el nivel más elevado de la aritmética que se enseña en las escuelas elementales; por el otro, es el punto de partida para todo lo que se verá después. Este capítulo analiza el concepto desde ambas perspectivas y se mencionan los mecanismos de transición y los comportamientos de los estudiantes. Posteriormente, se explora cuáles son los requisitos para un modelo computacional que solucione problemas relacionados con la proporción y se discuten las condiciones bajo las cuales el modelo puede producir soluciones razonables. Finalmente, se plantean preguntas sobre las implicaciones que este modelo podría tener en investigaciones futuras con niños.

La mayoría de los intentos por evaluar la capacidad de razonamiento proporcional (Karplus, Pulos y Stage, 1983a, 1983b; Noelting, 1980a, 1980b) se han enfocado en respuestas individuales a problemas con un valor faltante. Se juzgaron más avanzados los estudiantes capaces de contestar correctamente problemas numéricos "extraños" con múltiplos no enteros dentro y entre las cifras del cociente y sus respuestas fueron consideradas respuestas proporcionales. Esta perspectiva resulta, desde nuestro punto de vista, un tanto limitada, una condición necesaria, pero no suficiente, ya que estos problemas se prestan a soluciones puramente algorítmicas. En el presente capítulo se pretende agrandar este punto de vista y proponer que el razonamiento proporcional abarque un espectro más amplio y complejo de habilidades cognitivas que incluyan dimensiones tanto matemáticas como psicológicas.

No obstante, según Piaget (Piaget e Inhelder, 1975), la característica esencial del razonamiento proporcional es que implica una *relación entre dos relaciones* (o bien, una relación de "segundo orden"), en lugar de una relación simple entre dos objetos concretos (o dos cantidades directamente perceptibles). Por ejemplo, los piagetianos han considerado la tarea de equilibración como un prototipo de las tareas de razonamiento proporcional, a pesar de que el tipo de razonamiento que requieren no se ajusta a la ecuación $A/B = C/D$, sino más bien a la de $A \times B = C \times D$. De hecho, los piagetianos sostienen que en las fases tempranas de las capacidades de razonamiento proporcional de los niños es frecuente el "razonamiento aditivo" de la forma $A - B = C - D$. Creemos que es aconsejable limitar el término "razonamiento proporcional" a los diversos aspectos de las relaciones multiplicativas entre expresiones racionales.

En la educación de la ciencia, Karplus *et al.* (1983a, 1983b) describen una tercera perspectiva que establece que el razonamiento proporcional debe incluir *una relación lineal entre dos variables*. Por lo tanto, las tareas caracterizadas por el sistema de relaciones $Y = mX$ serían consideradas como tareas relacionadas con las proporciones (lo cual, por supuesto, son), a pesar de que los dos lados de la ecuación no son simétricos. Es importante diferenciar las situaciones proporcionales de aquellas que están caracterizadas por el sistema $Y = (a/b)X + n$.

Una de las metas principales de este capítulo será identificar y aclarar los aspectos del razonamiento proporcional que conservan su significado matemático y que se ha demostrado a través de la investigación que son importantes educativa o psicológicamente. Otra de las metas será identificar las áreas descuidadas de la investigación sobre el razonamiento proporcional.

Algunos tipos importantes de tareas de razonamiento proporcional

Los conceptos que fundamentan las nociones básicas sobre la ciencia, las matemáticas y la resolución de problemas cotidianos con frecuencia consisten en la capacidad de reconocer patrones similares o la similitud estructural de dos situaciones diferentes. Debido a que el razonamiento proporcional tiene que ver con una de las formas más comunes de similitud estructural, se le suele vincular con algunos de los *conceptos elementales más profundos* en el nivel básico de muchas de las áreas de ciencias o matemáticas. Como se mencionó anteriormente, creemos que el razonamiento proporcional es tanto el nivel más elevado de la aritmética elemental, como el punto de partida de todo lo que sigue. Por lo tanto, ocupa una posición muy importante en los programas escolares de matemáticas (y de ciencias).

Cada área del conocimiento que utiliza este paradigma básico de razonamiento tiende a modificarlo de forma sutil para que se ajuste a las necesidades específicas de la disciplina. Por ejemplo, en la aritmética que se enseña al final de la primaria y al principio de la secundaria, varias formas ligeramente diferentes del razonamiento proporcional tienen que ver con algunos de los elementos conceptuales más problemáticos de los programas:

– fracciones (equivalentes):	5/3 = n/m
– división:	805/23 = n/l
– valor posicional y porcentajes:	n% = 75/100
– conversión de medidas:	n dólares = (2/3)m dólares canadienses
– razones e índices:	15 pies/2 segundos = n millas por hora

En las áreas de estudio mencionadas, se nota que los siguientes siete tipos de problemas relacionados con la proporción surgen de manera natural. Sin embargo, los tipos 3 al 7 no han recibido la debida atención ni en la instrucción ni en la investigación de los libros de texto.

1. Problemas de valor faltante: A/B = C/D donde tres valores (incluyendo un par que indica el índice) son proporcionados y la meta es encontrar la parte faltante del segundo (y equivalente) par.

2. Problemas de comparación: A/B (=?=) C/D, donde se proporcionan todos los valores y la meta es evaluar si:

A/B < C/D, o A/B = C/D, o A/B > C/D.

3. Problemas de transformación:

a) Juicios de dirección del cambio:

Se proporciona una equivalencia de la forma A/B = C/D.

Después, uno o dos de los cuatro valores A, B, C o D aumenta o disminuye en cierta cantidad y la meta es decidir cuál de las relaciones (<, > o =) es verdadera para los valores transformados.

b) Transformaciones para producir igualdad:

Se proporciona una desigualdad de la forma A/B < C/D.

Después, se debe encontrar un valor x para alguno de los cuatro valores A, B, C o D, de tal forma que, por ejemplo, (A + x)/B = C/D.

4. Problemas de valores medios:

Se proporcionan dos valores y la meta es encontrar el tercero.

a) Medias geométricas: A/x = x/B.

b) Medias armónicas: A/B = (A – x)/(x – B).

5. Proporciones que incluyan conversiones de razones a índices a fracciones: la razón de niños a niñas en la clase era de 15 a 12. ¿Qué fracción de la clase eran niños?

6. Proporciones que utilicen unidades de medición y números: (3 pies)/(2 segundos) = x millas por hora o 5 pies/segundo = x millas/hora.

7. Problemas de traducción entre sistemas de representación: una razón (o fracción, o índice, o cociente) se da en una de las representaciones del sistema y la meta es reproducir la misma relación utilizando otro sistema de representación.

Las versiones realistas de problemas de razonamiento proporcional con frecuencia incluyen comparaciones entre representaciones. Hemos encontrado que éstas tienden a ser muy difíciles para la mayoría de los estudiantes (Lesh, Behr y Post, 1987).

Incluso cuando ambos lados de la proporción incluyen un mismo sistema de representación, las soluciones que los estudiantes proporcionan para estos problemas con frecuencia incluyen traducciones entre diferentes sistemas de representación. Véase, por ejemplo, el problema que se plantea en la figura 1. Se ha observado que los porcentajes de éxito se encuentran entre 9.2% para estudiantes de cuarto año y 46.2% para estudiantes de segundo de secundaria.

Susana puede caminar 15 millas en 5 horas.
Su razón de millas por hora es:

a) 5 a 15 *b)* 10 a 5

c) 3 a 1 *d)* no se especifica

Figura 1. Un problema escrito típico relacionado con las proporciones.

Es posible que un estudiante piense el problema de la figura 1 de alguna de las siguientes formas:

a) Parafrasear (es decir, traducir a un lenguaje más simple): quince es a cinco como ______________ es a ________.

b) Hacer un diagrama (es decir, traducir a un dibujo o diagrama):

HORA 1	HORA 2	HORA 3	HORA 4	HORA 5
M M M M M	M M M M M	M M M M M	M M M M M	M M M M M

c) Escribir una ecuación (es decir, traducir a símbolos escritos): 15/5 = m/h.

Incluso cuando el problema parece no tener más que un sistema de representación, su solución *puede* tener varias traducciones.

El razonamiento proporcional es un concepto parteaguas

Para poder definir qué aspectos del razonamiento proporcional deben enfatizarse en el futuro, es importante reconocer el papel de "parteaguas conceptual" que este razonamiento desempeña en la línea divisoria que separa los conceptos elementales de los más avanzados. Entonces, es las dos cosas: *1)* uno de los conceptos más elementales de los conocimientos de alto orden, y *2)* uno de los conceptos más elevados de los conocimientos elementales. Por ejemplo, en la psicología del aprendizaje humano, el razonamiento proporcional es ampliamente reconocido como la capacidad que muestra el camino del cambio de niveles de operativos pensamientos concretos a niveles operativos de pensamientos formales (Piaget y Beth, 1966).

En las siguientes dos secciones de este capítulo se analizará el razonamiento proporcional desde dos perspectivas diferentes:

1) El razonamiento proporcional como un punto de partida del álgebra y otros niveles superiores de las matemáticas.

2) El razonamiento proporcional como el nivel más elevado de la aritmética elemental, así como de los conceptos de número y medida.

El razonamiento proporcional como el punto de partida de las matemáticas de nivel medio superior

En el problema que se presentó un poco antes (véase la figura 1), supóngase que quisiéramos saber qué tan lejos llegaría Susana en tres horas. Este problema se puede resolver en tres pasos:

a) Escribir una ecuación que *describa* la situación del problema, por ejemplo, 15/5 = m/3.

b) *Transformar* la forma "descriptiva" de la ecuación a una forma "calculadora" equivalente, por ejemplo, m = 3x (15/5).

c) *Calcular* llevando a cabo las operaciones indicadas, m = 3x (3) = 9.

Este procedimiento de describir-transformar-calcular es una característica que diferencia al álgebra de la aritmética. Debe notarse que no es necesario que la ecuación que describe o modela un problema inmediatamente especifique una serie de cálculos para proporcionar una respuesta. En el álgebra, las fases de *descripción* y de *solución* de un problema pueden separarse. En la aritmética, los estudiantes van directamente a una serie de procedimientos de cálculo que les permitirán llegar a una solución.

Por su naturaleza el razonamiento proporcional implica algunos de los conceptos algebraicos más importantes que están relacionados con la equivalencia, las variables y las transformaciones. Se analizará cada uno de estos conceptos por separado.

Niveles de igualdad. Las siguientes clases de equivalencias se dan frecuentemente en las situaciones relacionadas con las proporciones:

a) Números o razones de números equivalentes, por ejemplo, $1/3 = 2/6 = 3/9$.

b) Expresiones equivalentes que tienen tanto unidades de medición como números, por ejemplo, $\frac{\text{kilómetros}}{\text{metros}} = \frac{1000}{1} \leftrightarrow 1$ kilómetro = 1000 metros.

c) Expresiones equivalentes que impliquen operaciones y/o relaciones, así como números y unidades de medida, por ejemplo, 6 pies/2 segundos = 3 pies por segundo = 2.0455 millas por hora.

d) Ecuaciones equivalentes, por ejemplo, $2/X = X/18 \leftrightarrow X^2 = 2x18 \leftrightarrow X = 6$, donde las transformaciones conservan algunas propiedades importantes y cambian otras.

En la aritmética, los signos de igual (=) pueden interpretarse generalmente como "da como resultado" o "da" (es decir, cuando se lee la ecuación $5 - 3 = 2$, se dice "cinco menos tres da dos"). Sin embargo, en el álgebra el signo de "=" suele representar una equivalencia de tipo más general. Por ejemplo, se pueden tratar dos expresiones como equivalentes por cualesquiera de las siguientes razones:

a) Se pueden reducir al mismo valor, por ejemplo, $6/2 = 4 - 1$.

b) Son estructuralmente similares, esto es, contienen el mismo patrón de relaciones y operaciones, por ejemplo, $\frac{y - b}{x - a} = \frac{d - b}{c - a}$

(Por supuesto que esto sólo es verdadero para ciertos valores de las variables).

c) Tienen gráficas idénticas en conjuntos diferentes a cero, por ejemplo, $f(x) = 2x2/3x$ y $g(x) = 2x/3$.

d) Sus gráficas cruzan el eje de las x en los mismos puntos.

e) Se puede sustituir una expresión por otra sin ganar (o perder) información interesante.

La comprensión del razonamiento proporcional debe ir más allá de la simple noción de que ambos lados de una ecuación son iguales (en el sentido de que pueden ser reducibles al mismo valor). Por ejemplo, nuestra intuición nos dice que una ecuación como "$6/2 = 4 - 1$" no debería denominarse una proporción (a pesar de que los dos lados son iguales), porque los lados de la ecuación no son estructuralmente similares; es decir, no tienen el mismo patrón de relaciones u operaciones y los componentes no están relacionados por multiplicaciones.

El reconocimiento de la similitud estructural aparece como un componente esencial para que se dé el razonamiento proporcional. Sin embargo, si exigimos el reconocimiento de la similitud estructural como una condición necesaria para que un proceso de razonamiento sea considerado razonamiento proporcional, entonces, por lo general, no se considerarían como parte del razonamiento proporcional las tareas que están modeladas por la ecuación $Y = (a/b)X$, pero que no están modeladas por la ecuación $Y/X = a/b$, a pesar de que $Y = (a/b)X$ y $Y/X = a/b$ son de algunas maneras, aunque no de todas, equivalentes.

Niveles de variables. Además de incluir varios diferentes niveles de equivalencia, las situaciones simples que implican el razonamiento proporcional también pueden tener varios niveles de variables. No es sólo la capacidad de variar lo que convierte a algo en una variable. Por ejemplo:

a) En muchas proporciones simples, como $3/x = x/27$, el valor de x no puede variar; sin embargo, esto no significa que x no sea una variable. Aquí lo importante es saber que x es un valor desconocido que se puede manipular utilizando reglas similares a las que se aplican a los números conocidos.

b) A veces incluso las constantes fijas, como π, que representa a pi, pueden recibir un rango variado de valores (por ejemplo, 22/7 o 3.14 o 3.14159265356) dependiendo del nivel de precisión que se elija como apropiado en una situación específica. Sin embargo, esto no significa que π sea una variable.

Entonces tenemos que el valor de un símbolo puede ser fijo y el símbolo ser una variable o bien que el valor de un símbolo puede tener la capacidad de variar y el símbolo ser una constante. Las explicaciones demasiado simplistas, como tratar a las variables como si se trataran de cosas que pueden variar, están destinadas a crear confusión entre los niños.

Transformación e invariancia. Para generar un conjunto de razones equivalentes a 3/9, se pueden utilizar una serie de transformaciones que nos lleven de una expresión a otra: $1/3 \rightarrow 3/9 \rightarrow 9/27 \rightarrow \ldots$ O bien, para encontrar el valor desconocido de x en una proporción como $3/x = x/27$, se pueden utilizar una serie de transformaciones para llevar la ecuación a una forma diferente: $3/x = x/27 \rightarrow x = 27 * 3/x \rightarrow x^2 = 81 \rightarrow x = 9$. Y para cualquiera de estas transformaciones, surgen asuntos relacionados con los niveles de equivalencia. Cada vez que un objeto se transforma, se pierde o se gana algo de información; lo importante es decidir si la información alterada tiene o no interés para nosotros. ¿Cuáles de las propiedades permanecen invariantes y cuáles no? Por ejemplo, se pueden considerar equivalentes dos ecuaciones por cualesquiera de las siguientes razones (recordar que en la sección previa se presentó una lista similar para las expresiones).

a) Tienen el mismo valor de verdad (es decir, ambas son verdaderas o ambas son falsas).

b) Tienen el mismo conjunto de soluciones (es decir, los mismos valores las satisfacen).

c) Una es una forma simplificada de la otra.

d) Pueden transformarse una en otra utilizando operaciones específicas.

Cuando un educador trata las transformaciones como si "todo se vale siempre y cuando se haga lo mismo de ambos lados de la ecuación", no sorprende que esta noción simplista con frecuencia lleve a errores en el razonamiento proporcional de los niños. Por ejemplo, en uno de nuestros recientes estudios clínicos (Behr, Wachsmuth, Post y Lesh, 1984), a los alumnos se les enseñaron igualdades como 3/4 = 6/8. A continuación se restaba un número de alguno de los cuatro proporcionados y se pedía al estudiante que cambiara uno de los tres números restantes para restaurar la igualdad, (es decir, algo como [3–1]/4 = [6–?]/8). Fue muy común que los estudiantes simplemente aumentaran o disminuyeran la misma cantidad al número correspondiente en ambos lados de la ecuación. De hecho, uno de los estudiantes incluso "demostró" que (3–1)/4 = (6–1)/8; borró los números 1 de ambos lados y explicó: "Esto está bien porque he hecho lo mismo en ambos lados".

Entender que una ecuación (como un todo) representa un "objeto" algebraico que se puede transformar de formas específicas que nos dejan invariantes ciertas propiedades interesantes (como el conjunto de soluciones), es el fundamento del razonamiento algebraico. Esto también es esencial en una forma simple en la solución de proporciones simples.

La ecuación A/B = C/D puede pensarse como una relación estática (=) entre dos sistemas matemáticos simples que se describen de forma independiente por las relaciones de razón A/B y C/D. Sin embargo, también pueden pensarse como la transformación dinámica que convierte a un simple sistema matemático (descrito por la relación de la razón A/B) en un sistema "equivalente" (descrito por la relación de la razón C/D). Nos parece que reconocer la similitud estructural es un componente esencial del razonamiento proporcional. Se puede concluir que los asuntos relacionados con la transformación e invariancia de las estructuras deben ser temas importantes en el razonamiento proporcional, incluso en los niveles más primitivos.

A pesar de los elementos expuestos aquí, las tareas que tienen que ver con las transformaciones y la invariancia han sido descuidadas en la literatura de investigación sobre razonamiento proporcional, a pesar de que Piaget (Piaget e Inhelder, 1956) y otros han enfatizado su importancia en ciertos tipos de tareas de conservación.

La tendencia por incluir acciones dinámicas que son difíciles de llevar al libro de texto o a los formatos de prueba con papel y lápiz ha sido un factor importante en la falta de atención prestada a las tareas de transformación. Un segundo factor es el exagerado énfasis que se da en "despejar la x" en los programas de educación matemática en los niveles de presecundaria y secundaria. Muchos comparten la opinión de que se tiene una mala interpretación de las matemáticas y se piensa que su esencia es "estar buscando el despeje de las x". No obstante, para entender la esencia del razonamiento proporcional, es importante entender que las matemáticas son esencialmente el estudio de la estructura y la invariancia, de la equivalencia y la no equivalencia bajo una variedad de distintas transformaciones. Conforme los estudiantes avanzan a niveles más elevados de matemáticas, las actividades de resolución de problemas se centran con menor frecuencia en el estereotipo de "despejar la x" y la mayoría entran en la categoría de estudiar la estructura-transformación-invariancia.

El razonamiento proporcional como el nivel más elevado de las matemáticas del nivel elemental

Muchos de los principales puntos conceptuales problemáticos que se presentan en los programas de las escuelas elementales son también importantes conceptos del razonamiento proporcional. Como ejemplos tenemos: *1)* las relaciones parte-todo descritas por Kieren (1976) y Behr, Lesh, Post y Silver (1983); *2)* las unidades compuestas (es decir, unidades hechas de otras unidades) enfatizadas por Steffe (Steffe y von Glasersfeld, 1983; Steffe, este volumen), Cobb (1987) y Post *et al.* (1988); *3)* las habilidades relacionadas con la representación enfatizadas por Kaput (1985; 1987a; 1987b) y Lesh, Post y Behr (1987); y *4)* las habilidades relacionadas con las mediciones enfatizadas por Vergnaud (1983), Streefland (1984, 1985) y Post *et al.* (1988). (Estas áreas han sido identificadas por los investigadores como los fundamentos conceptuales de los puntos problemáticos antes mencionados, los cuales parecen estar todos relacionados con la proporcionalidad y, finalmente, con el razonamiento proporcional.)

Razonamiento preproporcional. Si la característica más importante del razonamiento proporcional es reconocer la "invariancia de un sistema matemático simple", entonces, ¿será siempre necesario que este sistema matemático sea descrito por la relación de razón A/B? ¿O los sistemas caracterizados por $A - B$ (o $A \times B$ o $A + B$) también calificarían? Los sistemas matemáticos caracterizados por A/B se encuentran entre los más simples que existen; implican relaciones entre las dos cantidades, A y B. De tal manera que una ecuación como $A/B = C/D$ puede interpretarse como la representación de la relación "n veces más que" aplica a ambos lados.

La relación "n veces más que" puede interpretarse de dos maneras distintas: *1)* como la *relación aditiva* $A = n + B$ (o sea que $n = A - B$), o *2)* como la *relación multiplicativa* $A = n * B$ (o sea que $n = A/B$). En esta última situación generalmente se dice que es "n veces". En cualquier caso, el razonamiento sobre este tipo de conceptos es una de las situaciones más simples en la que los niños van más allá de las comparaciones entre cantidades perceptibles para pensar sobre las similitudes estructurales entre los sistemas matemáticos como un todo.

Por razones similares a las descritas en el párrafo anterior, las tareas como la de equilibración, que se caracterizan por la ecuación A * B = C * D (en vez de la ecuación A/B = C/D), son clasificadas en ocasiones como tareas de "razonamiento proporcional multiplicativo" y las tareas que se caracterizan por la ecuación A + B = C + D, son clasificadas como tareas que implican el razonamiento aditivo.

Las tareas caracterizadas por A/B = C/D o A * B = C * D tienden a incluir una relación multiplicativa, ¿pero se ve implicado el razonamiento proporcional? La regla que hemos establecido para responder esta pregunta es que si no hay pruebas de que el niño reconoce la similitud estructural representada a ambos lados de la ecuación, entonces no hay pruebas de que haya razonamiento proporcional. Por ejemplo, si A * B corresponde a una cantidad directamente perceptible (en vez de a una relación entre dos cantidades), entonces la tarea que de otra forma se hubiera caracterizado por A * B = C * x, en realidad se podría reducir (en la mente del niño) a una tarea caracterizada por P = C * x, donde P es un elemento "nuevo" del sistema. En este caso, la similitud estructural no se reconoce y no se requiere del razonamiento proporcional. Por lo tanto, la simple capacidad de dar las respuestas correctas a los problemas con la forma A * B = C * x no garantiza que se esté utilizando este tipo de razonamiento. Lo mismo es válido para los problemas de la forma A/B = x/D (donde la posición de x puede variar).

Surgen inquietudes similares en lo que respecta a las tareas aditivas caracterizadas por las ecuaciones A + B = C + x, o A – B = x – D. Es decir, las tareas que describen estas ecuaciones tienden a ser naturalmente reducibles a no-proporciones de las formas P = C + x, o P = x – D, donde P es una cantidad directamente perceptible.

Si la propensión de los niños por utilizar la adición para resolver los problemas caracterizados por A/B = x/D no es un indicador confiable del razonamiento proporcional, entonces, ¿por qué los investigadores (en su mayoría psicólogos del desarrollo) se referían al "razonamiento proporcional aditivo" en la literatura de investigación? La respuesta es que un niño, en las primeras etapas de la comprensión del razonamiento proporcional, con frecuencia utiliza estrategias de razonamiento aditivo para responder a tareas donde las relaciones multiplicativas tendrían que haberse visto involucradas (Hart, 1984; Noelting, 1980a, 1980b; Vergnaud, 1983). Por ejemplo, la siguiente entrevista muestra cómo surge naturalmente (aunque de forma incorrecta) el razonamiento aditivo durante una de nuestras investigaciones sobre las tareas multiplicativas.

Se le dio a un alumno de primer año de secundaria un rectángulo de 2 x 3 (véase la figura 2) y se le pidió que lo "agrandara". El estudiante respondió (de forma correcta) duplicando las longitudes de cada uno de los lados para producir un rectángulo de 4 x 6. A continuación se le pidió que lo "agrandara de tal forma que la base midiera 9". Esta vez el estudiante dibujó un rectángulo de 7 x 9 y explicó que: "Si lo duplicaba hubieran salido 12, así que sumé 3 de manera que del otro lado fueran 9". Se pueden hacer varias observaciones interesantes sobre esto. En primer lugar, el razonamiento aditivo de hecho aparece frecuentemente de forma "natural" como una etapa temprana en el desarrollo del razonamiento proporcional. En segundo, el paradigma de razonamiento que un niño utiliza, con frecuencia varía dentro de una tarea específica (como en el ejemplo anterior) o de una tarea a otra, dependiendo de las características particulares de la misma como se muestra a continuación: la complejidad de las relaciones numéricas (Karplus *et al.*, 1983a, 1983b), los distractores perceptuales (Behr *et al.*, 1983), y la colocación de la cantidad "desconocida" (Bezuk, 1986), por ejemplo, $x/B = C/D$ *vs* $A/x = C/D$ *vs* $A/B = x/D$ *vs* $A/B = C/x$.

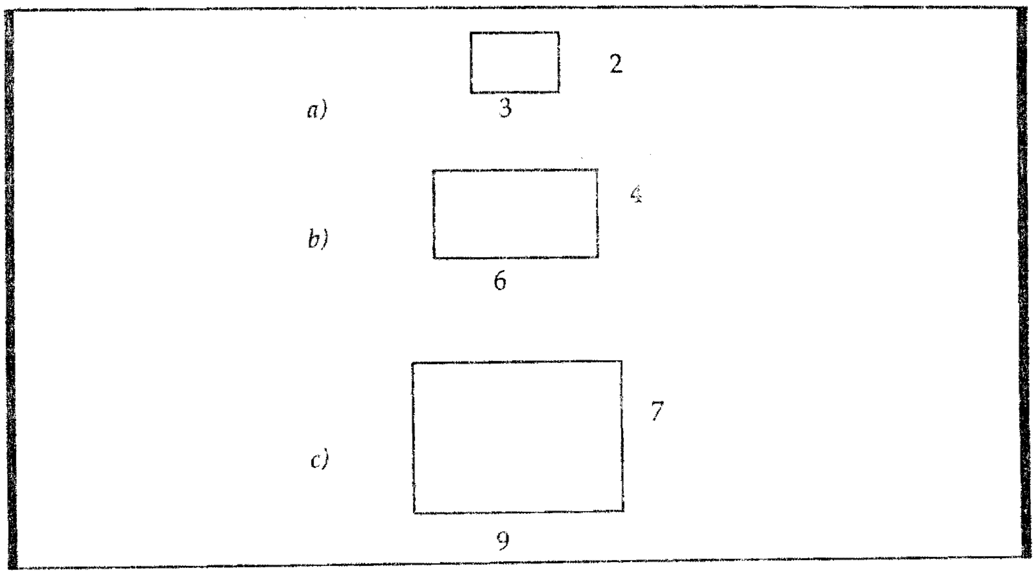


Figura 2. Agrandamiento de un rectángulo.

Por lo general, las tareas caracterizadas por ecuaciones aditivas (es decir, $A - B = C - D$, o $A + B = C + D$) no deben considerarse tareas de razonamiento proporcional; incluso las tareas multiplicativas (como las de equilibración o los tipos anteriores de tareas de área) caracterizadas por la ecuación $A * B = C * D$ *pueden* ser malos indicadores del verdadero razonamiento proporcional, especialmente cuando dichas tareas se relegan a una solución algorítmica. Por lo tanto, en general, el "razonamiento proporcional" es un término reservado para la solución de tareas caracterizadas por la relación entre dos expresiones racionales: esto es, $A/B = C/D$. No obstante, creemos que ésta es una condición necesaria, pero no suficiente. Otros tipos de situaciones también reflejan las verdaderas capacidades de razonamiento proporcional.

Transiciones de razonamiento preproporcional a razonamiento proporcional. A pesar de que Piaget y otros psicólogos del desarrollo hablan con frecuencia sobre el razonamiento proporcional como si se tratara de una capacidad global o de una manifestación de una estructura cognitiva general, parece que la evolución de este tipo de razonamiento se caracteriza por un aumento gradual en la competencia local (Lesh, Post y

Behr, 1987; Tourniaire y Pulos, 1985; Karplus *et al.*, 1983a, 1983b). La proporcionalidad se domina inicialmente en ciertas clases pequeñas y restringidas de problemas. La competencia se va extendiendo gradualmente a más tipos de problemas.

En esta sección sugerimos que el "punto de vista de ir aumentando gradualmente la competencia local" del desarrollo cognitivo tiene importantes implicaciones para la investigación y la instrucción que incluyen el razonamiento proporcional. Este punto de vista también brinda lineamientos para la investigación y la instrucción relacionadas con la solución de problemas.

El ejemplo que mencionamos ilustra algunos de los mecanismos más importantes que permiten a los estudiantes desarrollarse de un razonamiento preproporcional (aditivo) a formas generales de razonamiento proporcional multiplicativo. El problema que se muestra en la figura 3 fue utilizado por Lesh en sus investigaciones sobre el uso de las matemáticas en situaciones cotidianas.

Materiales: calculadora, catálogo de Sears de hace 10 años, catálogo reciente de Sears, periódico de hace 10 años, periódico reciente.

Estudiantes: Este problema ha sido resuelto por estudiantes ya sea de manera individual o en grupos de tres, que van desde individuos en los últimos años de la primaria hasta adultos. El grupo descrito en esta sección estaba conformado por alumnos promedio de primero de secundaria.

Problema: Alfredo Díaz empezó a dar clases hace 10 años en Guadalajara. Estaba recién casado y rentó un departamento en la Calle 8 por $2 500 al mes. También compró un automóvil VW nuevo por $45 000. Su salario inicial era de $140 000 anuales. Este año, el hermano de Alfredo, Omar, también empezó a dar clases en Guadalajara. Junto con su esposa rentó el mismo departamento que Alfredo había rentado 10 años antes, sólo que la renta ahora era de $4 300 por mes. También compró el mismo tipo de automóvil VW nuevo cuyo precio era ahora de $89 000. Se pueden encontrar otras diferencias de precios en el catálogo y en el periódico que se les dieron. ¿Cuál debería ser el salario inicial de Omar de manera que fuera equivalente al salario de Alfredo de hace 10 años?

Figura 3. El problema de la inflación.

El problema es de especial interés ya que:

a) Las soluciones dadas validaron las secuencias del desarrollo en el razonamiento proporcional, sobre las cuales Piaget había hipotetizado (Inhelder y Piaget, 1958; Piaget, Grize, Szeminska y Bang, 1968), Noelting (1980a, 1980b), Karplus *et al.* (1983a, 1983b), Karplus y Peterson (1970), Hart (1981) y muchos otros.

b) Las soluciones muestran cómo los mecanismos que se han enseñado para facilitar la evolución conceptual general también tienen un papel importante en la resolución de problemas.

Antes de que se considere una solución "típica" para este problema, es útil tener una idea general sobre las etapas más importantes que los psicólogos del desarrollo han observado en la evolución de las capacidades generales de razonamiento proporcional de los niños.

a) En sus respuestas más primitivas, los estudiantes tienden a hacer caso omiso de una parte de los datos y, por ejemplo, únicamente comparan los numeradores en las ecuaciones A/B = C/D.

b) En un nivel ligeramente más sofisticado, los estudiantes pueden notar las relaciones entre los cuatro factores en la proporción A/B = C/D, pero los relacionan sólo cualitativamente.

c) Es común que los primeros intentos por cuantificar impliquen diferencias aditivas constantes (por ejemplo, A–B = C–D) en lugar de relaciones multiplicativas.

d) El uso más temprano del razonamiento multiplicativo se basa con frecuencia en una especie de "patrón de reconocimiento y replicación", estrategia que algunos han llamado la estrategia de acumulación (Hart, 1984; Karplus y Peterson, 1970; Piaget *et al.*, 1968). Por ejemplo: en una tienda de dulces se venden dos dulces por ocho pesos. ¿Cuánto cuestan seis dulces? La solución puede ser registrada como:

- 2 dulces por 8 pesos.
- 4 dulces por 16 pesos.
- 6 dulces por 24 pesos.

Si se les proporciona una tabla de valores, los niños pueden reconocer un patrón que después aplicarán para descubrir un valor desconocido. Sin embargo, como señalamos anteriormente en este capítulo, el éxito en el uso de esta estrategia es un indicador relativamente débil del razonamiento proporcional.

Piaget *et al.* (1968) se refirieron a esta etapa como la de la "preproporcionalidad", ya que los niños intuyen que las diferencias cambian con el tamaño de los números y que tal cambio puede tener una naturaleza multiplicativa, pero no necesariamente se percatan de que deben considerar el constante incremento de la diferencia entre los términos relacionados del par en cada índice, es decir, de cada razón. Según Piaget, la preproporcionalidad es el resultado de las funciones coordinadoras, mientras que la proporcionalidad se basa en las operaciones reversibles. La diferencia principal entre el pensamiento relacionado con la función y el pensamiento relacionado con la operación es que el primero es esencialmente irreversible; esto es, dado un cambio en alguna de las cuatro variables de la proporción, el niño no puede compensar haciendo un cambio en el resto de las variables.

e) Las "proporciones lógicas" de Piaget indican un nivel de pensamiento en el cual se distingue la relación multiplicativa entre dos elementos. Esta relación se aplica después a los otros dos términos.

De acuerdo con Piaget, el desarrollo del razonamiento proporcional en los adolescentes pasa por las siguientes etapas: *1)* una estrategia global compensadora (con frecuencia de naturaleza aditiva); *2)* una estrategia multiplicativa sin generalización a todos los casos, *3)* una formulación final sobre la ley de las proporciones. Sin embargo, en los intentos por verificar la teoría de Piaget, se ha observado que el nivel de razonamiento de un niño no es constante en todas las tareas que realiza o incluso en una misma tarea (por ejemplo, cuando las relaciones numéricas, distractores perceptuales o variables contextuales han cambiado ligeramente). A pesar de que las etapas detalladas por Piaget han demostrado ser bastante sólidas en la descripción del comportamiento de los niños en tareas específicas, es común encontrar importantes variaciones entre las mismas, esto se ha llamado "retraso horizontal". El desarrollo conceptual en el área del razonamiento proporcional parece estar caracterizado por un incremento gradual de la competencia local más que por la adquisición de una estrategia general de razonamiento aplicable a cualquier problema. Es claro que las interacciones con el medio ambiente desempeñan un papel central en este desarrollo.

Los estudiantes tardan aproximadamente entre 20 y 40 minutos en encontrar una solución como la que se presenta en seguida. Se describe la respuesta típica de nuestros estudiantes, que iban desde los niveles superiores de la primaria hasta adultos. Durante la sesión de 40 minutos, la mayoría de los sujetos pasaron por cinco diferentes ciclos de reconceptualización. Se pueden notar las similitudes entre sus etapas de solución y las etapas descritas por Piaget y otros.

Conceptualización 1. La primera conceptualización de los estudiantes sobre el problema utilizaba el razonamiento aditivo, únicamente con base en un subconjunto parcial de la información proporcionada. El grupo hace restas para encontrar las diferencias de precios de artículos comparables viejos y nuevos. Sin embargo, nada más se consideraron unos cuantos artículos; sólo los que fueron descritos en un principio, como el coche y uno o dos artículos del catálogo. No se dijo nada que indicara explícitamente cómo estas diferencias les ayudarían a determinar el salario nuevo.

Conceptualización 2. ¿Por qué pasaron los estudiantes a una segunda conceptualización del problema? Puede haber dos posibles explicaciones: *a)* Conforme empiezan a ver su primera conceptualización con más detalle, reconocen dificultades que no habían identificado en un primer lugar (por ejemplo, "¿qué artículos debemos considerar?" y "¿qué vamos a hacer después con esta información?"). *b)* Como el proceso asociado con la primera conceptualización es tedioso, se consideran otras formas de resolver el problema.

La segunda conceptualización de los estudiantes se basó en una relación multiplicativa extremadamente primitiva que incluye un subconjunto incluso más parcial de la información proporcionada. Mientras que en la primera conceptualización se había perdido de vista la meta general de la tarea cuando se enfocó la atención en los detalles (restas individuales), la segunda conceptualización hace caso omiso de los detalles cuando se

Pensar en el razonamiento proporcional como una competencia local que aumenta gradualmente y no como una manifestación global de alguna estructura cognitiva general, tendrá como consecuencia una mayor importancia en las teorías del desarrollo y en el razonamiento proporcional como un elemento rico de la investigación. La mayor significación del razonamiento proporcional proviene de su poder para facilitar la capacidad de resolución de problemas. Una de las razones de más peso para hacer que la resolución de problemas sea parte central del programa de matemáticas de las escuelas es la contribución de dichas experiencias para que los niños comprendan otros conceptos centrales, muchos de los cuales, a su vez, están relacionados y requieren del uso del razonamiento proporcional.

El razonamiento proporcional y los conceptos de números racionales

En secciones anteriores se propuso que la investigación sobre el razonamiento proporcional enfatizara las tareas que tenían que ver con: *1)* transformaciones dinámicas; *2)* más de un solo sistema de representación; *3)* medición de unidades y números, y *4)* más de un tipo de expresión racional (índice, razón, cociente, fracción). Por otra parte, creemos que el término "razonamiento proporcional" debe limitarse a las situaciones caracterizadas por la equivalencia de dos expresiones racionales (A/B = C/D). No obstante, incluso con esta restricción, surgen ambigüedades:

a) Si un matemático (o educador, o psicólogo) caracteriza una tarea utilizando la proporción A/B = C/D, esto no necesariamente significa que dicha ecuación describa el proceso y las relaciones que un niño utiliza para interpretar y resolver la tarea.

b) Incluso entre los investigadores en el área de los números racionales (o expresiones racionales), por ejemplo, existe un desacuerdo sobre las características esenciales que distinguen los índices de las razones (Freudenthal, 1983; Kaput, 1985; Karplus *et al.*, 1983a, 1983b; Streefland, 1984; Noelting, 1980a, 1980b; Tourniaire y Pulos, 1985; Vergnaud, 1983). De hecho, es común que un mismo autor cambie de terminología entre un artículo y el otro, tal vez para acercarse al uso común de los términos, que en sí es inconsistente.

Un modelo computacional

Esta sección describe las características definitorias que hemos encontrado más útiles para distinguir entre los varios tipos de expresiones racionales. El poder y la consistencia interna de nuestras definiciones se puso a prueba a través de un modelo computacional que se utilizó para investigar el rango de situaciones en las cuales las reglas y definiciones que lo constituyen producen resultados apropiados y, lo que es más importante, para ayudar a identificar las variables y perspectivas apropiadas para la investigación con niños.

Algunos puntos de vista alternativos sobre la naturaleza de los "índices". Entre los participantes de la conferencia, Vergnaud y Schwartz fueron dos que adoptaron puntos de vista considerablemente diferentes sobre las características básicas que distinguen a los índices de las razones.

Vergnaud (1983, este volumen) sigue la tradición establecida por los antiguos griegos: define los índices como aquello que tiene que ver con cantidades en dos diferentes espacios de medición (por ejemplo, 30 millas/5 horas), mientras que las razones relacionan cantidades dentro del mismo espacio de medición (por ejemplo 15 galletas/10 galletas). Los griegos preferían esta definición porque estaban particularmente interesados en las formas en que los conceptos más antiguos de medición, basados en números enteros, conducían al dominio de los números y expresiones racionales. Vergnaud, como psicólogo del desarrollo, sin duda favorecía esta perspectiva por razones similares.

Kaput, Luke, Poholsky y Sayer (1986) y Schwartz (1983, este volumen) siguen una tradición similar a la de Gauss. Comparten esta opinión, Freudenthal (1973), Lebesque (1966), Whitney (1968a; 1968b) y otros matemáticos que no están tan precupados por reconciliar los conceptos de los números racionales con los conceptos inferiores de los números enteros, sino con encontrar los vínculos entre temas de orden más elevado sobre diversos tipos de funciones y complejos espacios de medición. Con base en unas matemáticas de cantidad, a diferencia de las matemáticas de número que se utilizan más, Kaput y Schwartz empiezan por distinguir entre dos tipos básicos de cantidades:

a) Las *cantidades extensivas* incluyen ejemplos como 5 millas, 5 grados (temperatura), 5 grados (ángulo) o 5 platos (comida). Estas cantidades nos dicen "cuánto" (es decir, la "extensión") de una cantidad se asocia a un objeto dado.

b) Las *cantidades intensivas* (o cantidades "por") incluyen los ejemplos como: 30 millas por hora o 30 dólares por artículo. Estas cantidades no dicen "cuánto" se tiene de una cantidad en términos absolutos, sino que expresan las relaciones entre una cantidad y una unidad de otra cantidad.

Nótese que las *cantidades escalares* se tratan como un tipo especial de cantidades intensivas en las cuales las dos cantidades relacionadas incluyen el mismo tipo de unidades: por ejemplo, 30 dólares por dólares (dinero ganado/dinero ahorrado). De acuerdo con el punto de vista de Schwartz y Kaput, un índice es una cantidad única (intensiva), mientras que una razón es la relación entre dos cantidades.

Los puntos de vista de Vergnaud y los de Schwartz aclaran de manera adecuada los puntos en sus áreas primarias de interés, pero cada uno conduce a ambigüedades cuando se extiende a otras. Por ejemplo, según Schwartz y Kaput, "30 millas/5 horas", ¿debería considerarse un índice (una única cantidad intensiva) o una razón (una relación entre dos cantidades) o un cociente (una operación entre dos cantidades)? De acuerdo con Vergnaud, la expresión "tres dólares canadienses/dos dólares estadounidenses" ¿implica dos mediciones dentro de un único espacio de medición (una razón) o dos diferentes espacios de medición (un índice)? ¿O qué tal "cuatro monedas de 25 centavos/1 dólar"?

Una de las dificultades de la perspectiva griega tiene que ver con la definición de cuándo se consideran iguales dos espacios de medición. ¿Qué pasa si una única cantidad se mide utilizando diferentes unidades como en los ejemplos anteriores? ¿O qué tal si se utiliza una única unidad para medir dos diferentes tipos de cantidades? Por ejemplo, en la costura, una medida de longitud (como tres yardas de tela) describe un área; de manera similar ocurre en la cocina, carpintería, agricultura, etcétera. De hecho, este tipo de situaciones son especialmente comunes en las ciencias, donde las mediciones indirectas de cantidades básicas se deben usar con frecuencia, por lo cual una unidad de un tipo de cantidad se utiliza para medir un segundo tipo de cantidad. Los psicólogos y educadores se topan con una dificultad fundamental: los matemáticos rara vez se han tomado la molestia de elaborar definiciones rigurosas que aclaren las muchas características que son importantes educativa o psicológicamente. Esto se debe a que el objetivo de los matemáticos generalmente es concentrarse en las similitudes estructurales entre las distintas tareas más que en las distinciones psicológicas que existen entre ellas. Por lo tanto, para muchas características psicológicamente importantes de las tareas no existe la correspondiente definición "correcta". Resulta clara la necesidad de un mayor acuerdo y consistencia entre la investigación sobre la educación de las matemáticas y la instrucción. La meta de la siguiente sección es describir las similitudes y las diferencias entre los índices, las razones, las fracciones y los cocientes utilizando un lenguaje que sea lo suficientemente poderoso y consistente de manera que:

a) Nuestro modelo computacional PAT (abreviatura de Problem Transformer [transformador de problemas]), pueda producir los resultados adecuados para una buena parte de los problemas de razonamiento proporcional.

b) Se tomen en cuenta las distinciones más importantes que han sido observadas por investigadores como Freudenthal (1983), Kaput (1985), Karplus *et al.* (1983a, 1983b), Noelting (1980a, 1980b), Streefland (1985), Tourniaire y Pulos (1985) y Vergnaud (1983).

Para alcanzar estas metas, *1)* se extenderá la perspectiva de Vergnaud para aclarar cuándo son iguales o diferentes dos espacios de medición, y *2)* se extenderá la perspectiva de Schwartz definiendo las fracciones, índices, razones y cocientes de manera que se eliminen las ambigüedades dentro de la categoría de problemas de razonamiento proporcional en los libros de texto escolares de matemáticas y de ciencias.

Breve descripción de la aplicación PAT. Para los propósitos de este capítulo, lo que se debe entender sobre PAT es que se diseñó para permitir a los estudiantes "escribir" (es decir, armar a partir de un diccionario en línea que se pueda ampliar gradualmente) problemas de palabras como los que aparecen en los libros de texto, y transformarlos cuando el estudiante le dé comandos indicados: *1)* SUBRAYAR resaltando las palabras y datos claves; *2)* PARAFRASEAR utilizando oraciones sencillas y sólo la información relevante; *3)* ESQUEMATIZAR usando una lista de puntos "dados" y "metas"; *4)* SIMPLIFICAR presentando el mismo problema con números más simples; *5)* HACER UNA ANALOGÍA con la misma estructura en un contexto diferente; *6)* ELABORAR SUBPASOS para identificar si existe una "pregunta intermedia" que pueda contestarse utilizando los datos disponibles; *7)* REVERTIR EL PASO identificando una pregunta intermedia a través de invertir el orden de los pasos desde las metas hasta los elementos dados; 8) MODELAR utilizando versiones electrónicas de manipulativos concretos bien conocidos, y *9)* ABSTRAER escribiendo una ecuación algebraica, una función o una expresión que describa el problema. Creemos que estas habilidades relacionadas con la transformación que requiere PAT son al mismo tiempo indicadores importantes de las capacidades de razonamiento proporcional de los niños.

Los puntos claves que hay que entender para crear una aplicación como PAT son los mismos que permiten a los investigadores describir las similitudes en la estructura fundamental de los problemas (dentro de ciertos dominios conceptualmente ricos, pero lo suficientemente simples).

La segunda característica importante de PAT es que sus capacidades computacionales deben ser similares a las del SEMCALC de Schwartz (1983). Esto es, PAT no permite que los estudiantes ingresen expresiones que no tengan etiquetas de unidad. Por ejemplo, si un estudiante escribe "3" (o 3x o 3ax), PAT responde con la pregunta "¿3 qué?", por lo cual el estudiante debe especificar: *1)* qué tanto, *2)* la unidad de medición y *3)* el tipo de cantidad fundamental, por ejemplo, "3 millas (distancia)" o "3 millas por hora (velocidad)".

Si el estudiante escribe "3 manzanas + 2 naranjas" entonces: *1)* si se ha indicado que las manzanas y las naranjas son frutas en la biblioteca en línea de PAT, entonces simplificará el enunciado a "5 frutas", o *2)* si la biblioteca no contiene esa información, responderá con la pregunta: "¿Cuál es la relación entre las manzanas y las naranjas?" (opción múltiple): ☐ Todas las manzanas también son naranjas. ☐ Todas las naranjas también son manzanas. ☐ Todas las manzanas y las naranjas son {llenar espacio en blanco}. A continuación la biblioteca de PAT se modifica para incluir la nueva información ganada a partir de la información del estudiante.

Cuando PAT está en el "modo computacional", manipula las expresiones matemáticas, que incluyen: *1)* etiquetas de unidades (por ejemplo, pies, millas por hora); *2)* tipos de cantidad (por ejemplo, longitud, velocidad); *3)* variables (por ejemplo, *x* y *y*); *4)* constantes literales (por ejemplo, a, b, m), y *5)* los números "puros".

Fracciones, índices, razones y cocientes. Para nuestros propósitos, se considerarán dos diferentes espacios de medición, siempre que tengan: *1)* un conjunto diferente de objetos; *2)* un tipo de cantidad fundamental diferente (por ejemplo, longitud, peso, tiempo, medición P y B en un tercer espacio de medición S, generalmente se representa como una modificación de P x B en S.

Se pueden observar los cuatro tipos de expresiones racionales en diferentes regiones de los diagramas como se ve en la figura 7. Por ejemplo: *1)* debido a que tanto la fracción como los índices son cantidades, se presentarán como ejes relacionados con P, B o S; *2)* debido a que las razones son relaciones, se presentarán como puntos en P x B, y *3)* debido a que los cocientes son operaciones, se presentarán como modificaciones de P y B en S.

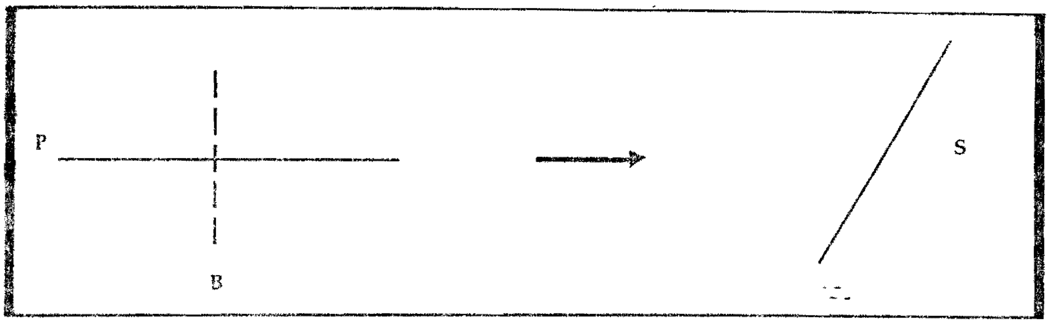


Figura 7. Modificaciones de dos espacios de medición P y B en un tercer espacio S.

En un nivel más alto de abstracción, los cuatro tipos básicos de expresiones racionales (fracciones, índices, razones y cocientes) pueden representarse utilizando un único modelo matemático, un espacio homogéneo consistente de matrices de 3 x 3. Los objetos, relaciones, operaciones y transformaciones pueden representarse como matrices dentro de este único espacio vectorial. Desde un punto de vista intuitivo, esto no es sorprendente ya que, por ejemplo, a pesar de que las fracciones y los índices se refieren a cantidades únicas, ambos también incluyen comparaciones implícitas entre las dos cantidades. Para las fracciones (por ejemplo, 3/4 de pizza), la comparación está oculta dentro de la "parte numérica" de la expresión (es decir 3/4), mientras que para los índices, la relación está oculta en la "parte de las unidades" de la expresión (por ejemplo, pizzas por niño). La relación oculta en 3 cuartos de pizza está entre el tamaño de la unidad (es decir, cuartos de pizza) y el tamaño del objeto que se está midiendo (es decir, 3).

Desde la perspectiva psicológica, es peligroso hacer este tipo de generalizaciones matemáticas. No deben llevarnos a pensar erróneamente que los estudiantes considerarán equivalentes a los índices, razones, cocientes y fracciones sólo porque se pueden interpretar como tipos equivalentes de objetos (en un espacio vectorial de 3 x 3). Por ejemplo, sólo a un nivel de comprensión más o menos sofisticado un índice como "tres cuartos de milla por hora" se considera como equivalente a la razón "tres millas a cuatro horas".

Operaciones con fracciones, índices, razones y cocientes. De acuerdo con las definiciones de fracciones, índices, razones y cocientes que se han dado aquí, se aplican diferentes reglas a los cuatro tipos de expresiones racionales cuando las sumamos, multiplicamos o igualamos. De esta manera, para terminar este capítulo, se proporcionarán ejemplos para demostrar cómo PAT trata algunas de estas diferencias en la fase computacional.

Dado que las fracciones y los índices son cantidades, pueden sumarse y multiplicarse utilizando las reglas estándares utilizadas en tipos más simples de cantidades. Por ejemplo:

1) Sólo se pueden sumar cantidades que estén dentro del mismo espacio de medición.

3 MANZANAS + 2 MANZANAS = 5 MANZANAS

3 MILLAS POR HORA + 2 MILLAS POR HORA = 5 MILLAS POR HORA

2) Si las dos cantidades se encuentran en espacios de medición diferentes, pero relacionados, entonces deberán modificarse en el mismo espacio de medición antes de poder sumarlas.

3 CUARTOS DE PIZZA + 2 TERCIOS DE PIZZA

↓ ↓

9 DOCEAVOS DE PIZZA + 8 DOCEAVOS DE PIZZA

Nota: la capacidad de transformar entre espacios de medición "relacionados" es de gran importancia en las operaciones precedentes.

3) Las reglas estándar para la adición por lo general no tienen sentido para las razones (es decir, pares ordenados de cantidades). Por ejemplo, ¿qué significaría "sumar" una razón niño-a-pizza de dos a tres con una razón de niño-a-pizza de tres a cuatro? Diecisiete-a-doce no sería una respuesta sensata.

4) Las cantidades de diferentes espacios de medición se pueden multiplicar utilizando las reglas normales de la multiplicación (a pesar de que los resultados pueden o no tener interpretaciones "sensatas").

5 HOMBRES x 3 HORAS-DE-TRABAJO = 15 HORAS HOMBRE DE TRABAJO

5 MILLAS-POR-HORA x 3 HORAS = 15 MILLAS

5 PIES x 3 PIES = 15 PIES x PIES = 15 PIES^2 = 15 PIES CUADRADOS

Nota: una cantidad extensiva multiplicada por otra cantidad extensiva corresponde a la interpretación del "producto cruzado" de la multiplicación, y una cantidad extensiva multiplicada por una cantidad intensiva corresponde a la "adición repetida".

Parte de la meta de utilizar un modelo computacional como PAT es hacer explícitos ciertos procesos de pensamiento que pueden ser importantes en el razonamiento de los niños a pesar de que estos procesos se pueden utilizar sólo de manera implícita o sin mayor reflexión.

¿Son las etiquetas de unidad y las transformaciones entre espacios de medición y conversiones entre los diferentes tipos de expresiones racionales realmente tan importantes como parecen indicar las soluciones de PAT? Por lo general, nuestra investigación apunta a una respuesta afirmativa. Las traducciones entre diferentes tipos de cantidades y las conversiones entre diferentes "expresiones racionales" (índices, razones, cocientes y fracciones) parecen ser factores psicológicos reales. La capacidad de los estudiantes para hacer "aritmética de etiquetas de unidad" y para cambiar flexiblemente de un tipo de expresión racional a otro fueron indicadores particularmente confiables de la capacidad cotidiana de resolución de problemas. Es probable que el número de pasos relacionados con la conversión que PAT tiene que tomar para resolver un problema sea una herramienta excelente para predecir su dificultad.

Las características más importantes de las tareas que requiere PAT para generar "problemas similares" son las que están directamente relacionadas con los tipos de unidad y los tipos de expresiones racionales.

Resumen

En este capítulo, hemos intentado elaborar un marco coherente centrando la atención en los descubrimientos más importantes surgidos a partir de investigaciones pasadas sobre el razonamiento proporcional. Asimismo, hemos intentado centrar nuestra atención en ciertas tareas cuyas categorías se han descuidado y sugerir algunas nuevas para futuras investigaciones. Nos preocupamos por aclarar las dificultades del lenguaje porque, en el dominio del razonamiento proporcional, la terminología confusa e inconsistente resulta en serios impedimentos para el progreso a futuro.

Surgieron temas similares independientemente de si se trataba el razonamiento proporcional como el nivel más elevado de las matemáticas elementales o como el punto de partida de las matemáticas avanzadas. Invariablemente tenían que ver con transformaciones y equivalencias, así como con traducciones dentro y entre varios sistemas de medición y de representación.

A pesar de que los psicólogos del desarrollo tienden a hablar del razonamiento proporcional como si se tratara de una capacidad global relacionada con una especie de estructura cognitiva general, la investigación sobre la enseñanza de las matemáticas demuestra claramente que la evolución del razonamiento proporcional está caracterizada por un incremento gradual de las competencias locales. En nuestra opinión, la investigación caracterizada por el desarrollo conceptual local proporcionará enfoques de gran importancia sobre los mecanismos utilizados por los niños para evolucionar hacia órdenes más altos de razonamiento. El razonamiento proporcional parece ser un área de investigación especialmente productiva para estudiar este fenómeno.

Referencias

Behr, M., Lesh, R., Post, T., y Silver, E. (1983), "Rational number concepts", en R. Lesh y M. Landau (eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 91-126). Nueva York, Academic Press.

Behr, M., Wachsmuth, I., Post, T., y Lesh, R. (1984), "Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment", en *Journal for Research in Mathematics Education*, 15, 323-341.

Bezuk, N. (1986), *Variables affecting seventh grade student's performance and solution strategies on proportional reasoning word problems*, Unpublished doctoral dissertation, University of Minnesota.

Cobb, P. (1987), "A year in the life of a second grade class: Cognitive perspective", en J. C. Bergeron, N. Herscovics, y C. Kieran (eds.), *Proceedings of the Eleventh International Conference of the Psychology of Mathematics Education* (vol. III, pp. 201-207). Montreal, University of Montreal.

Freudenthal, H. (1973), *Mathematics as an educational task*, Dordrecht, Holland, D. Reidel

Freudenthal, H. (1983), "Didactical phenomenology of mathematical structures". *Mathematics education library*, Boston, D. Reidel.

Hart, K. M. [ed.] (1981), *Children's understanding of mathematics*, 11-16. London, John Murray.

Hart, K. M. (1984), *Ratio: Children's strategies y errors*, Windsor, England, NFER-NELSON Publishing Company.

Inhelder, B. y Piaget, J. (1958), *The growth of logical thinking from childhood to adolescence*, Nueva York, Basic Books.

Kaput, J. J. (1985), *Multiplicative word problems and intensive quantities: An integrated software response* (Technical Report 85-190), Cambridge, MA, Harvard University, Educational Technology Center.

Kaput, J. J. (1987a), "Representation systems and mathematics", en C. Janvier (ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 19-26). Hillsdale, NJ, Erlbaum.

Kaput, J. J. (1987b), "Toward a theory of symbol use in mathematics", en C. Janvier (ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 159-196), Hillsdale, NJ, Erlbaum.

Kaput, J. J., Luke, C., Poholsky, J., y Sayer, A. (1986), *The role of representation in reasoning with intensive quantities: Preliminary analyses* (Technical Report 869), Cambridge, MA, Harvard University, Educational Technology Center.

Karplus, R., y Peterson, R. (1970), *Intellectual development beyond elementary school II: Ratio, a survey*, Berkeley, Lawrence Hall of Science, University of California.

Karplus, R., Pulos, S., y Stage, E. K. (1983a), "Early adolescents' porportional reasoning on 'rate' problems", en *Educational Studies in Mathematics*, 14, 219-234.

— (1983b), "Proportional reasoning in early adolescents", en R. Lesh y M. Landau (eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 45-90), Nueva York, Academic Press.

Kieren, T. E. (1976), "On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbres in number and measurement", en R. A. Lesh (ed.), *Number and maesurement* (pp. 101-144), Columbus, OH, Ohio State University, ERIC/SMEAC.

Lebesque, H. (1966), "Sur la measure des grandeurs", en *Enseignement mathematique*", 32-34. As reprinted in translation in K. O. May (ed.), *Measure and the integral*, San Francisco, Holden Day (original work published 1933-36).

Lesh, R., Behr, M., y Post, T. (1987), "Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving", en C. Janvier (ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 41-58), Hillsdale, NJ, Erlbaum.

— (1987), "Rational number relations and proportions", en C. Janvier (ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 40-77), Hillsdale, NJ, Erlbaum.

Noelting, G. (1980a), "The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part I–Differentiation of stages", en *Educational Studies in Mathematics*, 11, 217-253.

Noelting, G. (1980b), "The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part II–Problem-structure at successive stages, Problem-solving strategies and mechanism of adaptative restructuring", en *Educational Studies in Mathematics*, 11, 331-363.

Piaget, J., y Beth, E. (1966), *Mathematical epistemology and psychology*, Dordrecht, Holland, D. Reidel.

Piaget, J., Grize, J., Szeminska, A., y Bang, V. (1968), *Epistemologie et psychologie de la fonction*. Paris, Paris University Press.

Piaget, J., e Inhelder, B. (1956), *The child's conception of space*, London, Routledge y Kegan Paul.

— (1975), *The origin of idea of chance in children*, Nueva York, W. W. Norton.

Post, T., Behr, M., y Lesh, R. (1986), "Research based observations about children's learning of rational number concepts", en *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 8 (1), 39-48.

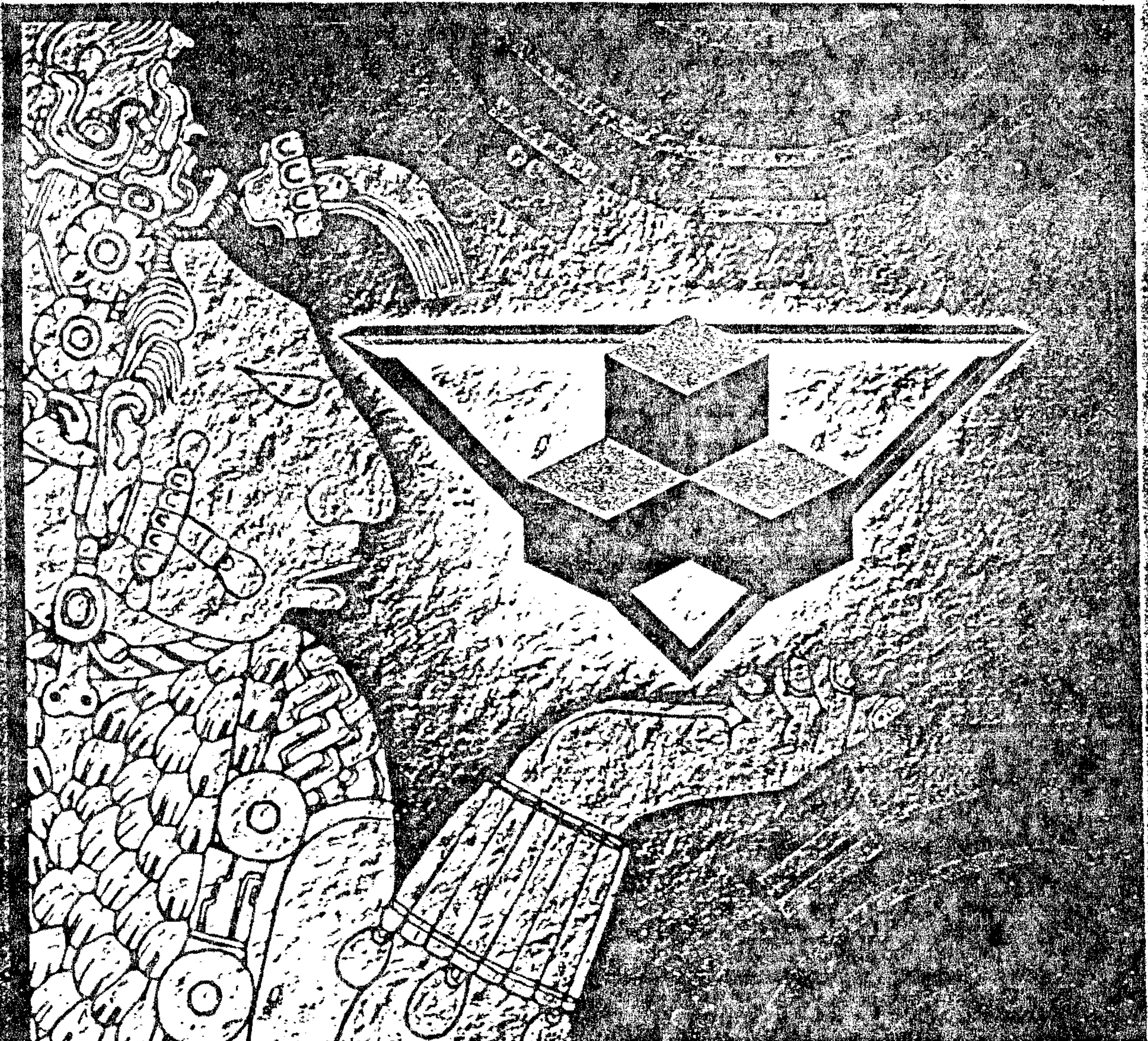
— (1988), "Proportionality and the development of pre-algebra understandings", en *Algebraic concepts in the curriculum K-12* (1988 Yearbook), Reston, VA, National Council of Teachers of Mathematics. Schwartz, J. L. (1983), *The semantic calculator users manual*, Nueva York, Sunburst Communication.

Steffe, L. P. y von Glasersfeld, E. (1983), "The construction of arithmetical units", en *Proceedings of the fifth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 292-303), Montreal.

Streefland, L. (1984), "Search for the roots of radio: Some thoughts on the long term learning process. (Towards... A theory) Part I: Reflections on a teaching experiment", en *Educational Studies in Mathematics*, 15, 327-348.

Educación Matemática

Vol. 10 ● No. 2 ● Agosto 1998



Saiz, Irma Elena. "La ubicación espacial en los primeros años de escolaridad", en *Educación Matemática*, vol. 10, núm. 2, agosto, México, Grupo Editorial Iberoamérica, 1998, pp. 71-87.

Grupo Editorial Iberoamérica

216

217

Este artículo trata sobre los distintos modelos posibles para orientar un objeto y las dificultades que se presentan cuando se pretende comunicar información espacial sobre ubicaciones o posiciones que involucren objetos.

Referido a esto último, se analiza una actividad propuesta en un libro de texto para alumnos de 3er. año y se propone otra que permite avanzar sobre esta discusión y provocar un avance en los aprendizajes de los alumnos.

La geometría mantiene relaciones complejas con el espacio físico que nos rodea. Como menciona Colette Laborde (1988) *"los problemas planteados por las relaciones entre, de una parte los objetos reales, los datos extraídos de la percepción y de la observación y por otro lado los objetos teóricos del dominio del saber, conciernen particularmente a la geometría. (...) Los saberes teóricos coexisten con saberes culturales, sociales, prácticas profesionales extraídas de problemas relativos al dominio del espacio físico"*

Siguiendo a Berthelot-Salin (1992) podemos llamar conocimientos espaciales a los conocimientos que puede describir la geometría y que permiten a cada uno anticipar los efectos de sus acciones sobre el espacio y su control, así como la comunicación de informaciones espaciales.

En particular, entre estos conocimientos que permiten a un sujeto controlar convenientemente sus relaciones con el espacio sensible, nos interesamos en aquellos referidos a la posición de objetos o personas (incluyendo al sujeto) en el espacio, a los que identificamos con el nombre de ubicación espacial.

La Ubicación espacial como problema del dominio del espacio que nos rodea puede relacionarse con los conocimientos teóricos matemáticos de orientación del plano y con la elaboración de sistemas de referencias para el plano y el espacio aunque estos conocimientos no son adquiridos a temprana edad.

El dominio del espacio en el niño se desarrolla desde sus primeros movimientos de bebé y continúa a lo largo de la infancia y de la adolescencia. Estos aprendizajes se basan tanto en las acciones efectivamente realizadas en el espacio como en las interacciones que con objetos, personas o lugares realiza cada niño. La imitación de los comportamientos de adultos o de otros niños y los intercambios orales a propósito de las localizaciones de los objetos, los desplazamientos, las acciones y sus efectos constituyen fuentes de conocimiento para el niño.

Liliane Lurçat (1976), llama directa e indirecta a estas dos fuentes de conocimiento. La directa, proveniente de la actividad de los niños a través de sus desplazamientos exploratorios y de la manipulación de objetos y la indirecta, trasmitida por el entorno por medio del lenguaje, a partir de la denominación de objetos y de lugares, así como de las consignas que a ellos se refieren; ambas se desarrollan progresivamente y en muy estrecha relación.

Sin embargo ese desarrollo depende de las condiciones específicas de la vida de los niños y de los hábitos culturales del grupo social al que pertenecen. En algunos medios se privilegia la acción directa sobre las cosas y en otros la acción indirecta, valorizando el uso del lenguaje.

Al nivel de los currículos de la escolaridad obligatoria, en el Nivel Inicial y en el 1er. ciclo (6 a 8 años) de la EGB aparecen algunos contenidos relativos a la construcción del espacio que apuntan a permitir al niño ubicarse en él y situar a los seres y objetos en función de si mismo y en relación con otros objetos.

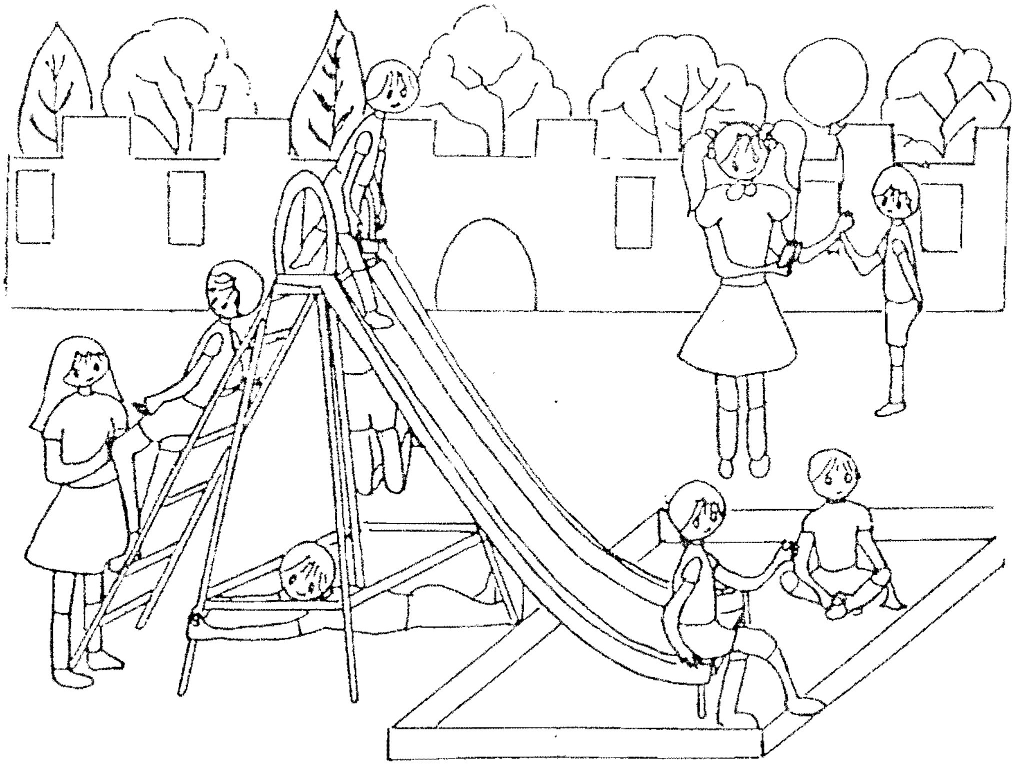
En cuanto a los libros de texto, es en el Nivel Inicial y en 1er. año donde aparecen actividades que tratan de responder a estos objetivos. Con frecuencia se relacionan con objetivos psicológicos de elaboración del esquema corporal y del establecimiento de la lateralidad. Sin embargo existe gran variedad, algunas series de libros no mencionan estos objetivos ni incluyen actividades en el 1er. ciclo, otras los incluyen hasta 3er. año. Esto da cuenta de un contenido poco estabilizado en la tradición escolar.

En los casos en que la enseñanza se plantea lograr esos objetivos, presenta con frecuencia situaciones en las que espera se sigan produciendo aprendizajes o se afiancen los ya aprendidos, de manera similar a como se produce en situaciones extraescolares, en cuanto a la transmisión de conocimientos por medio del intercambio verbal sobre relaciones espaciales, localizaciones o posiciones. Peró deja de lado las relaciones efectivas que los niños establecen en los aprendizajes anteriores a la escolaridad y la finalidad que en general poseen tales acciones.

Las situaciones relativas a la ubicación espacial que presentan los libros de textos corresponden en general a un uso del lenguaje específico reducido a solicitar una acción (señalar, pintar o contar) en relación con objetos o personas que se encuentran en alguna de las zonas mencionadas por el autor: arriba de, a la derecha de,...

Examinaremos una de esas actividades que puede considerarse prototípica de la enseñanza de las nociones de ubicación espacial.

Tobogán 1[2]



[2] Extraída de "Así aprendemos" Matemática 3. Editorial Hachette (1986) pag. 3. Este libro forma parte de una serie de libros destinada a alumnos de 1ero. a 7mo. año de la EGB, que incluye además Guías para el docente de cada uno de los años escolares.

Los autores plantean sobre esta imagen algunas preguntas relativas a la ubicación de los niños en el parque de juegos. Algunas de ellas están referidas a los personajes presentados previamente y que son utilizados por los autores en la mayor parte de las actividades del libro.

¿Cuántos niños hay sobre el tobogán?
¿Quién está debajo del tobogán?
¿Cuántos niños hay a la izquierda del tobogán?
Para observa y discutir:
¿Quiénes están en el arenero?
¿En qué escalón del tobogán el niño apoya su codo?
¿Cuántos niños hay delante del tobogán?
¿Cuántos hay detrás del tobogán?

De estas preguntas sólo tomaremos las relacionadas con el tema que nos interesa y que son las siguientes:

¿Cuántos niños hay a la **izquierda** del tobogán?
¿Cuántos niños hay **delante** del tobogán?
¿Cuántos hay **detrás** del tobogán?

Para poder contestar a las preguntas que les plantean los autores, los niños deben determinar, en el espacio que rodea al tobogán, las distintas zonas que mencionan las preguntas y contar los niños presentes en cada una de ellas.

¿Es posible determinar unívocamente la zona "a la izquierda" del tobogán? Una posibilidad es asignar la izquierda a la zona cercana a la escalera del tobogán coincidiendo con la parte izquierda de la hoja, pero si se piensa en el movimiento que realiza un niño que se desliza por el tobogán, su propia lateralidad puede ser extendida al tobogán y a la zona que lo rodea y denominar izquierda del tobogán a la zona comprendida entre el tobogán y el muro.

¿Cuál es el lugar "delante" del tobogán?

Con frecuencia denominamos así a la zona que se sitúa en nuestro campo visual, entre nuestro cuerpo y el objeto, mientras que atrás es aquella zona "tapada" por el objeto, en la que el objeto interfiere en nuestra línea visual. En el caso de estar situado en la posición correspondiente a un observador de la lámina del libro, detrás del tobogán correspondería a la zona situada entre el tobogán y el muro.

Sin embargo, ningún niño duda cuando su madre le previene: "*no te pares delante del tobogán, que te pueden lastimar*". Y ese adelante no corresponde con el que acabamos de describir.

Vemos así que la manera de orientar un objeto y el espacio puede provocar dificultades contrariamente a lo que sucede con la orientación en el propio cuerpo o en el de otro sujeto. Estas consideraciones serán precisadas en el párrafo siguiente.

Orientación del objeto

Para orientar un objeto, Liliane Lurçat (1976) menciona tres formas diferentes de proyectar sobre él el propio esquema corporal. En el trabajo mencionado se plantea[3] que: *la representación del espacio por parte del niño va a constituirse apoyándose sobre objetos fijos tomados como puntos de referencia. La aparición del lenguaje, con la formación de conceptos, permite separar el esquema corporal del propio cuerpo para proyectarlo sobre los objetos como principio de individuación:*

todo objeto a partir de que es conceptualizado, estructura el espacio que lo rodea: aparece como el centro de un plano local en el cual las grandes polaridades son las mismas del esquema corporal: adelante, atrás, derecha, izquierda, arriba, abajo. Pero los planos que rodean a los objetos se superponen e interrelacionan, como con el plano atribuido al propio cuerpo. Aparecen así grandes conflictos que nacen de la interpenetración de esos planos.

En este artículo nos ocuparemos solamente de los pares de referencias: adelante-atrás y derecha-izquierda.

Siguiendo a L. Lurçat podemos afirmar que, en relación con un objeto situado frente al observador existen dos maneras de orientar el espacio que lo rodea:

a) proyectando sobre el objeto, el esquema corporal propio.
o b) teniendo en cuenta la orientación del objeto

a) La autora señala tres maneras básicas de proyectar sobre un objeto el propio esquema corporal: por traslación, por rotación o por simetría

Traslación	Rotación	Simetría
Ad	At	At
Iz Dr	De Iz	Iz Dr
At	Ad	Ad
Ô	Ô	Ô
Sujeto	Sujeto	Sujeto

Por *traslación:* según este modelo, se asigna al objeto los referenciales propios del cuerpo del observador. En relación con el tobogán del dibujo, correspondería asignar derecha e izquierda del mismo lado que los del sujeto observador, asignar adelante a la zona más alejada del observador (considerando un tobogán real en una plaza), es decir cerca de la pared (correspondiendo en el dibujo a la parte superior de la hoja) y atrás la zona más cercana al observador.

Por *rotación*: se asigna al objeto los referenciales del propio cuerpo después de realizar una rotación de 180°. La derecha e izquierda se invierten, adelante pasa a asignarse a la zona más cercana al observador y atrás a la zona más alejada, cerca de la pared.

Por *simetría*: se asigna al objeto los referenciales del esquema corporal a partir de una simetría con respecto a un plano vertical paralelo al frente del cuerpo del observador. Así, derecha e izquierda se encuentran del mismo lado que las del observador, en cambio adelante se asigna a la zona más cercana al observador y atrás la zona más alejada; es decir cercana a la pared.

Además de estas tres formas básicas, L. Lurçat señala que pueden encontrarse formas mixtas que asignan los puntos de referencia para el eje adelante-atrás utilizando uno de los modelos y para el eje derecha-izquierda otro de los modelos.

b) En principio los objetos son orientados por un sujeto, proyectando sobre él su propia lateralidad. Decimos en principio, ya que existen objetos que pueden considerarse orientados o que pueden orientarse, dependiendo de su función o forma, independientemente de la

[3] Prólogo de René Thom al libro de L. Lurçat ya citado

lateralidad o posición del sujeto que designa los puntos de referencia. Así, una tetera puede ser orientada definiendo un adelante en relación con su pico y un atrás en relación con el asa. Esta orientación se realiza atendiendo a puntos de referencia propios del objeto (en este caso, el pico y el asa) que son utilizados para orientar el espacio que lo rodea. Un vehículo posee un adelante (que denominamos parte delantera) y un atrás (parte trasera) a la vez que posee una izquierda (la puerta o rueda izquierda) y una derecha (la puerta o rueda derecha) determinados por su movimiento. Un escritorio o una cocina pueden adquirir una orientación específica de acuerdo a su uso, así adquieren significado expresiones como: delante de la cocina o atrás del escritorio.

No sucede lo mismo con las referencias a la derecha o a la izquierda, más relacionadas con el sujeto que las designa que con el objeto en sí mismo. Es importante mencionar que para determinar las polaridades del eje adelante - atrás tanto de sujetos como de objetos se utiliza en general referencias objetivas: la función, la forma, el movimiento, mientras que para el eje derecha-izquierda las referencias son subjetivas. Así, adelante de la cocina corresponde a la cara en la que se encuentran las perillas, la puerta del horno, etc. y por proyección el espacio cercano; la determinación de "adelante del auto" se relaciona con el sentido del movimiento. En cambio para definir la derecha e izquierda de un objeto, se utiliza con frecuencia la lateralidad del propio cuerpo, por ejemplo, "a la derecha de un negocio" no es una expresión precisa, salvo que utilicemos la propia lateralidad y en ese caso con frecuencia se agrega la posición del sujeto: "saliendo, a la derecha".

La derecha e izquierda de los objetos podrían ser definidas en forma similar a la lateralidad del cuerpo humano: la parte derecha de nuestro cuerpo es la ubicada entre la parte delantera y la trasera, girando en el sentido de las agujas del reloj. De esta manera una vez identificadas las referencias adelante y atrás de un objeto, podría determinarse la derecha y la izquierda de acuerdo a este modelo.

Un tobogán así como los demás objetos que permiten ser orientados hace aparecer el conflicto ya mencionado entre la lateralidad del sujeto y la del objeto.

En relación con la derecha e izquierda, si se define adelante, en relación con el lugar de llegada y atrás, en relación con la escalera, puede definirse la derecha del tobogán de acuerdo al modelo anterior, que coincide por otra parte, con la región ubicada a la derecha de un niño que se deslice por el tobogán.

Volviendo a la actividad tobogán 1

Retomando las tres preguntas que plantea la actividad Tobogán1, queda claro que no existe para ellas una única respuesta, debido a los distintos modelos que pueden utilizarse para orientar un objeto.

Estas consideraciones pudieron ser corroboradas en la observación de una clase de 3er. año, donde se utilizaba el libro del cual fue extraída la situación Tobogán1. En ella pudimos observar que la respuesta a cada pregunta está lejos de ser uniforme para todos los alumnos, lo cual puede ser explicado desde el análisis anteriormente realizado.

En el Libro para el Maestro de 3er. año que acompaña al libro para el alumno del cual fue extraída la actividad Tobogán1, se señala:

El maestro de tercer grado[4] debe asegurarse de que el niño es capaz de :

- *situar respecto de él los seres y los objetos que lo rodean y reconocer las posiciones de los mismos con referencia a su propio cuerpo*
- *observar y descubrir las relaciones espaciales que existen entre los seres y entre los objetos que lo rodean. Es decir, explorar su medio.*

Los autores indican que en los Libros para el Maestro de los dos años anteriores pueden ser encontradas las secuencias y fundamentaciones de esa exploración del espacio. No se realiza ninguna indicación específica en relación con la actividad seleccionada.

En los Libros del Maestro de 1ero. y 2do. año, se incluye un mismo texto en relación con Exploración y Construcción del espacio, en el cual, sobre la utilización de objetos no orientados como puntos de referencia para la ubicación de otros objetos sólo se menciona lo siguiente[5] :

Lateralidad. Para lograrla debe:

1. *Reconocer los costados de su cuerpo, lateralizarlo (brazo derecho, izquierdo, etc.)*
2. *Ubicar los seres o los objetos respecto de la orientación de su cuerpo*
3. *Ubicar la derecha e izquierda de otras personas o de cuerpos orientados*
4. *Ubicar objetos a la derecha o la izquierda de seres u objetos orientados*
5. *Ubicar objetos a los costados de objetos no orientados (pelota, vaso) tomando como referencia a una persona. Esta etapa es la más difícil de lograr.*

Es importante recalcar que no se trata solamente de hacer vivir el espacio (acciones) al niño, sino también, tratar de lograr que lo exprese oralmente y lo represente, pues sólo así adquirirá, progresivamente, su ubicación espacial y su esquema corporal, tan necesarios en el aprendizaje de la lecto-escritura y el cálculo.

Vemos que este texto no provee a los docentes ninguna indicación sobre los diferentes modelos de orientación que pueden utilizar los alumnos para responder a las preguntas de la actividad ni recursos metodológicos para organizar la clase y la confrontación posterior.

Ocuparse en la escolaridad obligatoria de los objetivos relativos a la ubicación espacial, implica hacerse cargo de estas dificultades. El vocabulario correspondiente a las posiciones relativas y a los desplazamientos en el espacio, aplicado a situaciones familiares es comprendido precozmente, y éste es uno de los motivos que puede enmascarar la diversidad de modelos desde los cuales los niños se orientan a sí mismos y a los objetos en el espacio.

Es responsabilidad de la enseñanza hacer jugar a este vocabulario también su rol informativo, confrontando a los alumnos con situaciones que los obligue a precisar las relaciones espaciales en juego e incluso a explicitar las referencias utilizadas en la comunicación.

[4] Corresponde a 3er. año de la EGB en la actual denominación.

[5] Matemática2. Libro del Maestro. Editorial Hachette.(1985) Pag. 208-209.

Tobogán 2

A partir del análisis anterior y teniendo en cuenta el marco teórico en el que se desarrolla esta investigación se elaboró una secuencia de actividades a las que llamaremos Tobogán2.

Describiremos los objetivos, el diseño, el análisis de la tarea para los alumnos y las opciones tomadas para su elaboración. Posteriormente se realizará el análisis del desarrollo en clase con alumnos de 3er. año.

1-Objetivos:

- Determinar relaciones espaciales entre objetos o personas en el entorno próximo utilizando puntos de referencia
- Elaborar un lenguaje apropiado para comunicarlas sin ambigüedades. Para ello se apunta a:
- descubrir la necesidad de explicitar los puntos de referencia utilizados
- explicitar la posición del observador y/o el modelo de orientación seleccionado

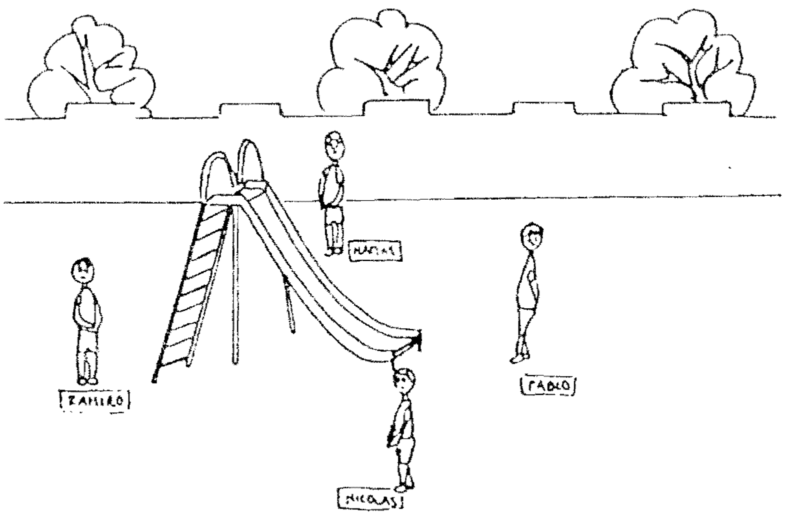
La finalidad de estas actividades para los alumnos, es la determinación de la información necesaria para identificar a los niños presentes en la representación gráfica de una plaza. Se organizaron de tal manera que la ubicación espacial de los niños respecto de los demás o de los objetos presentes en la situación sea una información pertinente para la tarea a desarrollar.

2-Diseño:

Los alumnos trabajan organizados en un número par de grupos formados por 2 o 3 alumnos cada uno.

Primera parte:

La mitad de los grupos recibe el siguiente dibujo.



La otra mitad del salón recibe un dibujo similar, pero que no incluye el nombre de los niños.

Consigna :

"Los alumnos pertenecientes al primer grupo, a quienes llamaremos emisores, recibieron el dibujo de una plaza, donde hay cuatro niños y cada uno de ellos tiene un cartelito con su nombre.

Los alumnos pertenecientes al segundo grupo, a quienes llamaremos receptores, tienen el mismo dibujo, pero en los cartelitos no están escritos los nombres de los niños.

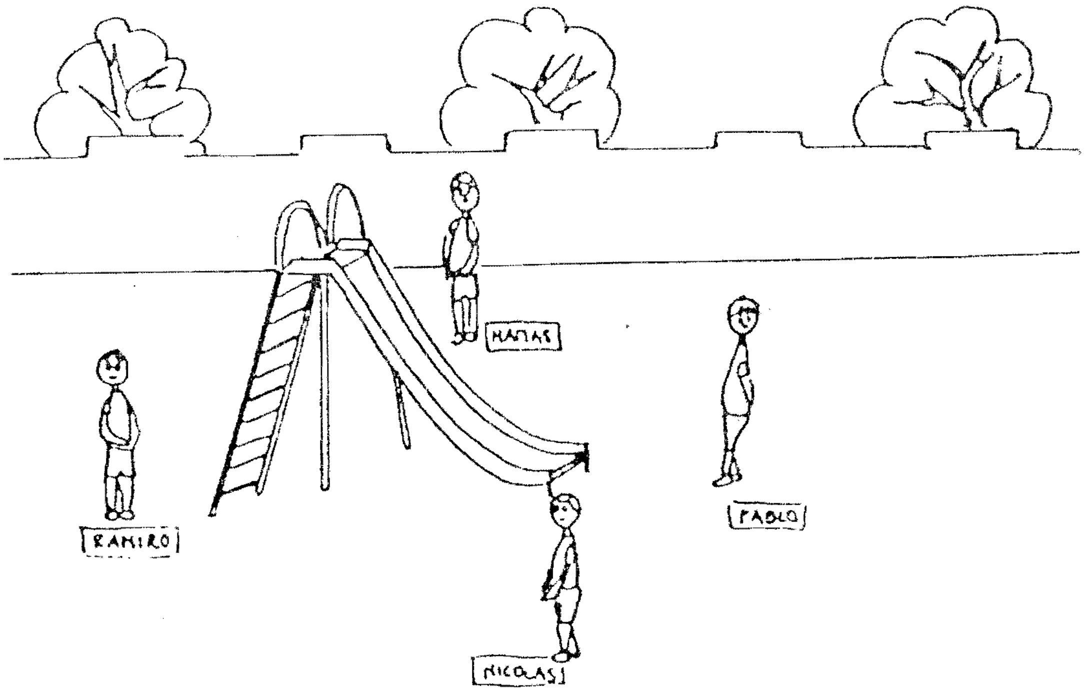
Los emisores deben lograr que sus compañeros pertenecientes a los grupos receptores coloquen en el cartelito de cada niño su nombre respectivo. Para ello deben enviar la información que consideren necesaria para lograrlo. Estos mensajes deben ser escritos y no incluir dibujos ni croquis.

Si a los equipos receptores se les presenta alguna dificultad, pueden plantear preguntas por escrito a su equipo emisor, quien las contestará también por escrito.

Una vez concluida la tarea los dos equipos compararán sus dibujos y analizarán los errores, si los hubo y las dificultades encontradas"

Segunda parte :

Se invierte el rol de emisores y receptores, a partir de un dibujo similar con niñas (en lugar de niños) ubicadas en las mismas posiciones. Se organizan la actividad de la misma manera que la anterior.



Tercera parte :

El docente plantea a toda la clase el análisis de algunos de los mensajes producidos por los equipos a fin de determinar si permiten o no la asignación del nombre de cada niño. Esta discusión debería poner en evidencia la necesidad de plantear acuerdos previos para lograr la comunicación.

Finalmente, cada par de alumnos elabora un mensaje a partir de lo discutido en la fase anterior, que permita comunicar de la mejor manera posible las designarinformaciones necesarias para que un alumno ajeno a este grupo escolar pueda a cada niño de la situación presentada con su nombre correspondiente. Estos mensajes son analizados y discutidos en la clase y se elabora en forma colectiva, teniendo en cuenta las conclusiones de ese análisis, el mensaje que será entregado a un alumno ajeno al grupo.

Algunas precisiones:

- La clase se organiza en grupos de 2 o 3 alumnos para facilitar la aparición de las concepciones acerca de la orientación, de cada uno de los alumnos y a la vez favorecer los intercambios entre ellos.
- El número par de grupos permite corresponder a cada grupo emisor con un grupo receptor con quien intercambiará los mensajes.
- Si el grupo en el que se desarrolla la actividad no está habituado a este tipo de trabajo será necesario dedicar un cierto tiempo a la apropiación de la consigna por parte de los alumnos. En frecuente que los alumnos la interpreten como una adivinanza donde se incluyen algunas "pistas" y donde, a la vez se trata de dificultar el trabajo del receptor.

3-Análisis de la tarea en función de la consigna dada

Decisiones tomadas

En este apartado se mencionan las modificaciones que se realizaron en la situación representada en el dibujo. El análisis de la secuencia que justifica estos cambios se realizará en el próximo apartado.

Por un lado se eliminaron todas las características de los niños que pudieran servir para identificarlos más allá de su ubicación con respecto al tobogán u a otros objetos. Por otra parte se redujo el número de niños para centrar la discusión en las polaridades básicas: adelante-atrás-derecha-izquierda. Esto último exigía colocar a los niños en ciertas ubicaciones específicas, abandonando otras más complejas que incluía la situación original: sobre o debajo del tobogán, sobre (o en) la escalera, etc. además de las ya mencionadas.

En el dibujo entregado se conservó el muro y los árboles de la situación original para permitir utilizarlos, junto con la escalera del tobogán, como referentes objetivos. De esta manera se logró que las discusiones se centraran en las posiciones de los dos niños ubicados a la derecha y a abajo, respecto de la hoja, dado que se trata de las dos ubicaciones no identificables fácilmente a partir de tales objetos, por este motivo, fue también eliminado el arenero, lugar de llegada de un niño que se desliza por el tobogán.

DESCRIPCIÓN DE LA TAREA PARA LOS ALUMNOS

Para que el mensaje elaborado permita al grupo receptor colocar el nombre de cada uno de los niños, es necesario incluir en él la información necesaria que permita identificarlos. Dado que las demás características como sexo, vestimenta, altura, color del pelo o forma del peinado, etc. han sido eliminadas, es necesario recurrir a su ubicación espacial respecto de alguno de los objetos o personas presentes en el dibujo: el tobogán, los otros niños, el muro, los árboles o incluso la hoja, soporte del dibujo, para identificarlos.

El recurso a las polaridades de la hoja : arriba, abajo, derecha, izquierda, permite identificar las posiciones de los cuatro niños a condición de que se explicite en relación a qué se formulan las referencias.

Así. Matías quedaría definido como el que está en la parte de arriba de la hoja, Nicolás en la parte de abajo, Pablo a la derecha de la hoja y Ramiro a la izquierda.

Es claro que con estas referencias no existe ambigüedad posible en la asignación de los nombres. Este puede ser el recurso elegido por adultos para elaborar los mensajes pero no sucede lo mismo con los alumnos del 1er. ciclo de la EGB.

Si no se recurre a la hoja como referente, puede utilizarse el muro y la escalera como referentes objetivos, es decir, independientes de la ubicación del sujeto que elabora el mensaje. Estas referencias permiten ubicar a Ramiro y a Matías, pero no a Pablo y a Nicolás. Incluso para Matías es necesario precisar que se trata del niño ubicado más cerca del muro, ya que los cuatro niños se encuentran delante del muro.

Las demás formas de identificar a los niños, dependen de la ubicación del sujeto que las utiliza (ubicación real o simulada: "*poniéndome en la escalera, a la derecha...*" y no siempre pueden ser comprendidas por un receptor si no son explicitadas.

En todos los casos es necesario determinar puntos de referencia, ya sea el tobogán o algunas de sus partes, otros objetos ajenos al tobogán, puntos de referencia relativos al sujeto que observa, o incluso la hoja en sí, soporte del dibujo.

ANÁLISIS DE LA SITUACIÓN PLANTEADA

La situación Tobogán2 está construida a partir de una situación de comunicación en la que un grupo emisor que posee una información (el nombre de los niños) debe comunicarla al equipo receptor que no la posee. La información enviada debería permitirle colocar el nombre correspondiente a cada uno de los niños.

Para los emisores, se trata de caracterizar cada uno de los niños a fin de permitir su identificación. Para ello deben determinar la información pertinente, seleccionarla y comunicarla (elaborar un lenguaje apropiado) por medio de un mensaje. La posibilidad de establecer relaciones espaciales de los niños entre ellos o con los objetos presentes aparece como una característica pertinente de la situación.

Para los equipos receptores se trata de una tarea de decodificación. El problema para ellos es de saber decodificar las informaciones trasmitidas para transformarles en acciones: establecer el nombre de cada uno de los niños.

Esta organización de la actividad, característica de las situaciones de formulación definidas en la teoría de las situaciones didácticas (Brousseau 1986) obliga a los alumnos a determinar primero que la ubicación espacial de los niños puede constituir un recurso pertinente para resolver la tarea propuesta y posteriormente a elaborar las relaciones espaciales en juego, mientras que en la situación Tobogán1 se trata de interpretar las relaciones espaciales explicitadas en el texto. En esa situación sólo se plantea la tarea reservada a los receptores de la secuencia Tobogán2.

Por otra parte Tobogán2 hace jugar al conocimiento involucrado un rol bastante cercano al que juega en las situaciones habituales de ubicación espacial, ya que la funcionalidad específica del vocabulario espacial es comunicar información a alguien que no la posee. Esto permite a los alumnos atribuir una significación próxima a la de las prácticas de referencia de los conocimientos elaborados en esa situación.

Consideramos que la situación Tobogán1 no permitirá necesariamente a los niños cuestionarse los conocimientos espaciales que poseen ni hacerlos evolucionar. Una posible discusión entre ellos, organizada por el docente después de la tarea, aunque no está expresamente planteada en el libro, podría permitir la toma de conciencia de algunos alumnos de la existencia de modelos diferentes de orientación, pero dado que estos modelos no son puestos posteriormente en juego ni confrontados con los resultados obtenidos, la reflexión podría resultar insuficiente para hacerlos evolucionar, buscando las precisiones necesarias y la determinación y explicitación de puntos de referencia.

En un segundo momento de la secuencia Tobogán2, los alumnos se enfrentan a una situación de validación tanto en relación con el vocabulario utilizado como a la pertinencia de la información explicitada. Una primera fase de la validación del mensaje está dada por la denominación correcta de cada uno de los niños por parte del grupo receptor. Una segunda fase ocurre durante la discusión y los acuerdos que logran los alumnos al analizar las dificultades presentadas para elaborar y comprender el mensaje. Es fundamentalmente después del segundo intercambio de mensajes cuando los alumnos tienen la oportunidad de analizar la validez de sus mensajes en una discusión colectiva monitoreada por el docente.

A lo largo de la secuencia, en particular en las primera y segunda parte, se busca un funcionamiento a-didáctico (Brousseau 1986) de los alumnos frente a la situación planteada, es decir un funcionamiento independiente del docente en cuanto a que éste deja de ser el proveedor del conocimiento necesario para la resolución del problema. El desarrollo de situaciones a-didácticas y el establecimiento de relaciones a-didácticas de los alumnos con la situación garantizaría una mejor calidad de los aprendizajes ligada al hecho de que los alumnos son capaces de atribuir un significado próximo al de las prácticas de referencia de los conocimientos elaborados.

Si bien se trata de una situación didáctica, es decir organizada por el docente para hacer adquirir a los alumnos un saber específico, la redacción del mensaje y su envío al otro equipo se organiza como una fase a-didáctica: los alumnos deben determinar por sí mismos las relaciones espaciales en juego y formularlas en un vocabulario comprensible por los receptores. El logro o no de la tarea por parte de los receptores permite conocer la validez de la información utilizada para elaborar el mensaje.

Es necesario aclarar aquí, que la validación establecida por ese recurso puede ser parcial. Si los dos grupos (emisores y receptores) utilizan modelos de orientación diferentes (y explicitarlos es uno de los objetivos de la secuencia) el mensaje puede ser correcto en cuanto a la información enviada y al vocabulario utilizado y sin embargo los receptores no pueden cumplir con su objetivo de identificar a los niños para colocar su nombre debido justamente a la utilización de un modelo diferente para interpretar el mensaje.

O bien, lograr la tarea debido a implícitos (es el que queda, debe ser Nicolás) o a formulaciones ambiguas que son comprendidas por el equipo receptor en el mismo sentido que el emisor. Esto será analizado en el siguiente apartado.

Realización de la situación en la clase de 3er. año

La secuencia Tobogán2 fue desarrollada en dos clases[6] de 3er. año pertenecientes a dos escuelas diferentes.[7] La duración total del desarrollo de la secuencia fue de tres módulos de 1 hora cada uno. Las clases, las intervenciones y las discusiones entre los alumnos y con el docente fueron registradas[8] en su totalidad. Fueron recogidos y analizados los 26 mensajes elaborados en las diferentes instancias de la secuencia en ambas clases en forma grupal, colectiva o por parejas de alumnos.

Las condiciones de desarrollo de la secuencia fueron diferentes en ambas escuelas. En una de ellas, el escaso trabajo grupal y de situaciones de comunicación previos provocó una mayor dificultad para comprender la consigna y apropiarse del problema. Esto marca una diferencia con la otra clase donde el estilo de trabajo previo, de abundante trabajo grupal y colectivo y de actividades específicas de análisis y de discusión, permitió una comprensión inmediata de la consigna. Una vez comprendida, todos los alumnos utilizaron la ubicación espacial de los niños en sus mensajes, pero no siempre fue posible para el equipo receptor colocar los nombres de los niños, debido al uso de modelos de orientación diferentes.

Algunos grupos plantearon una orientación únicamente en función del tobogán, determinando claramente un adelante (lugar donde se llega después de deslizarse) y un atrás (cerca de la escalera), pero variando la asignación de derecha e izquierda. Algunos se imaginan o hacen el gesto correspondiente, ubicados desde la escalera para definir la derecha e izquierda; otros desde el arenero, lugar de llegada, las definen en el sentido contrario, lo que muestra que tanto el objeto en sí, el tobogán, como el movimiento que se realiza en él determinan más claramente el adelante y atrás que la derecha e izquierda.

Esta constatación coincide con los resultados de investigaciones como la de L. Lurçat (1976) quien menciona que la designación adelante-atrás estaría determinada preferentemente por el objeto mientras que el par derecha-izquierda quedaría determinado por el sujeto y concluye: "*la orientación del medio ambiente por el par adelante-atrás domina la orientación subjetiva que caracteriza las referencias dere-*

[6] Agradecemos a la docente Miriam Flores su buen disposición para que sus clases sean observadas y el estar siempre dispuesta a probar, analizar o modificar propuestas.

[7] Los grupos escolares pertenecen a las Escuelas 291 y Colegio Saint Patrick de la Pcia. de Corrientes, Argentina

[8] Agradecemos a las integrantes del Equipo de Matemática del Consejo Gral. de Educación de la Pcia. de Corrientes : C. Camerano y C. Barrionuevo su participación en estas observaciones, registros y desgrabaciones y su disposición para los numerosos intercambios realizados acerca del tema que nos ocupa.

cha-izquierda. Para adelante y atrás, el niño se desprende de su propia subjetividad mientras que queda preso de ella para la izquierda y la derecha"[9].

En cuanto a la proyección del esquema corporal sobre el tobogán, no encontramos en ningún caso alumnos que la realicen por traslación de su esquema pero sí por rotación o simetría. Uno de los niños, José, pasó al pizarrón para indicar a sus compañeros (y a nosotros) cómo determina la derecha e izquierda. Colocado de espaldas al pizarrón, sobre el dibujo del tobogán y enfrentado a la clase, define con su cuerpo un eje casi vertical que divide al pizarrón en dos zonas: la derecha y la izquierda, quedando así dos niños en cada una de las zonas: Matías y Ramiro en la zona derecha y Pablo y Nicolás en la izquierda. En la elaboración del mensaje de la 3era. clase perfecciona esta asignación determinando además un eje horizontal, quedando Ramiro a la derecha adelante, Matías a la derecha atrás, Pablo a la izquierda atrás y Nicolás a la izquierda adelante.

Este tipo de orientación es presentado por José en cada una de sus intervenciones a lo largo de las tres clases pero no es comprendida por sus compañeros, a pesar de sus reiteradas explicaciones. En la última clase cuando se analizaban distintas propuestas, declara que acepta las de los demás porque permiten comprender la ubicación de los niños, más claramente que la suya.

Otro de los alumnos, Antonio, propone asignar la derecha e izquierda proyectadas por traslación desde su esquema corporal sobre el tobogán y realizar una proyección similar usando también la derecha e izquierda, según un eje perpendicular al anterior, cambiando su posición desde: frente al tobogán a: sobre la escalera. A lo largo de las tres clases pudimos observarlo gesticulando con sus manitos palmas para arriba y ubicándose primero frente al tobogán luego desde la escalera[10]. Comprendía claramente la dificultad de su sistema de referencias pero esa misma dificultad le impedía elaborar un lenguaje que le permitiera comunicarlo.

Podemos señalar que las asignaciones más frecuentes son las producidas por simetría y las determinadas por el tobogán mismo, considerando como adelante el lugar al cuál se llega luego de deslizarse por él. En los mensajes por parejas elaborados en la 3° clase, un 75% de los niños sitúa a Pablo *delante del tobogán*. Algunos alumnos precisan aún más esta formulación, buscando otros referentes objetivos que eliminen la ambigüedad en el mensaje como: *delante de las patas de la bajada del tobogán* o *enfrente de la punta de la bajada del tobogán.*

En algunos grupos se produjeron formulaciones que superaban la aparente (no necesariamente explicitada) contradicción entre dos modelos diferentes. En uno de ellos al finalizar la clase, uno de los observadores interroga a dos alumnas sobre el mensaje elaborado por ambas:

Obs. : *¿Y a ver Sara, a vos cuál te parecía que está adelante del tobogán?*
Sara: *éste* (Nicolás)
Obs. : *¿y el que está atrás?*
S: *éste* (señala a Matías)
Obs. : *¿y a vos?*
Julieta: *éste* (Pablo)
Obs. : *¿y atrás?*
J: *éste* (Ramiro)

9 La investigación a la cual se refiere esta conclusión ha sido realizada con niños de 4 a 6 o 7 años.
10 Y aceptando a la vez que "ayer me ponia acá", en relación con la zona próxima a la bajada del tobogán

230

Obs. : *así que para Julieta el que está detrás del tobogán es Matías y para Sara el que está detrás es Ramiro*
Las dos: *sí*
Obs. : *¿y qué hicieron?*
(se rien)
Obs. : *¿y cómo mandaron el mensaje?*
Sara (riendo): *el que está adelante del muro es Matías.*

Nos interesa rescatar que los alumnos toman conciencia de la dificultad de caracterizar la posición de los niños en el dibujo, en particular en la asignación de los puntos de referencia del eje: derecha e izquierda.

Las referencias derecha-izquierda y en particular la discusión con respecto a qué o quién fueron dadas, no fueron utilizadas de la misma manera por todos los alumnos. Para algunos se constituyó en una discusión muy importante, para otros, conscientes de la dificultad que podría provocar en los receptores evitaron su utilización en la mayor parte de las veces.

La utilización de otros puntos de referencias objetivos, exteriores al tobogán como la pared o internos a él como la escalera (cuando utilizan «al lado de" y no a la izquierda o derecha de ella), les permitió empezar a cuestionar los sistemas empleados previamente y a buscar referenciales que eliminen la ambigüedad de la información enviada. La referencia "Ramiro está al lado (o detrás) de la escalera" al constituirse en una formulación objetiva e incuestionada, permitió en muchos grupos dudar de las denominaciones realizadas anteriormente.

Estas referencias aparecen en todos los mensajes elaborados en la última parte de la secuencia, sin que esto haya sido discutido y acordado explícitamente.

El tipo de organización de la secuencia, con elaboración de mensajes en pequeños grupos, discusiones entre los grupos correspondientes y análisis grupal de las dificultades, permite que las formulaciones más claras se empiecen a difundir entre los alumnos y sean aceptadas aún si no han sido explícitamente mencionadas como más económicas y no se hayan realizado los acuerdos necesarios.

Por ejemplo, uno de los grupos utiliza la expresión "cerca de" para ubicar a los niños en la plaza con referencia a la escalera, al muro o a otras personas presentes. Si bien no existe ambigüedad en la comunicación cuando se ubica "cerca de" la escalera o del muro, ubicar a uno de los niños en función de la ubicación de los otros exige un cuidadoso orden en las formulaciones realizadas, ninguna puede incluir a uno de los niños no ubicados previamente. El grupo receptor de este mensaje, cuando elabora el suyo, adopta también la expresión "cerca de" para ubicar a los niños de la situación, pero presta mucho cuidado al orden en que enuncia las ubicaciones. Ambos grupos abandonan tal expresión, una vez que conocen y se comentan otras relaciones espaciales más claras y precisas, establecidas por sus compañeros de clase.

Dado que algunas de las formas de orientar un objeto se relacionan con el propio cuerpo, la posición de los alumnos en la clase con respecto a la hoja con el dibujo, es una variable importante; si bien se decidió ubicarlos de un solo lado de la mesa, esta variable no pudo ser controlada totalmente ya que los alumnos asumen durante la actividad, posiciones diferentes, colocándose a veces sobre los bordes laterales de la mesa. Las referencias "a la derecha de" o "delante de" pasan así a ser diferentes según sea la posición del niño que las formula. Incluso, la posición elegida para determinar la derecha e izquierda del tobogán se vio en ocasiones influenciada por la posición de los niños en la mesa. Así, en una de las parejas, Micaela, sentada a la izquierda simula colocarse en la escalera, en cambio, Juan Pedro, sentado a la derecha se ubica en la bajada del tobogán para designar la derecha e izquierda del tobogán.

Algunas de estas diferencias fueron eliminadas durante la elaboración del mensaje, otras perduraron en las discusiones posteriores.

Al final de las tres clases podemos afirmar que la actividad provoca en todos los alumnos la elaboración de relaciones espaciales y la necesidad de precisar las referencias que pueden ser utilizadas. Los alumnos evolucionan en las formulaciones a partir de la necesidad de precisión aportada por la comprensión o no por parte de los receptores del mensaje enviado, por el análisis y discusión entre los alumnos y con el docente y por la búsqueda de formulaciones que permitan eliminar la ambigüedad en la comunicación.

Sin embargo, la determinación de acuerdos previos entre los grupos y la explicitación de los modelos de orientación diferentes no fue organizada por el docente[11] quedando en general, a cargo de los alumnos tomar conciencia de las dificultades y elaborar formas de comunicación diferentes que les permitiera superarlas. Con frecuencia los alumnos evitan las contradicciones o ambigüedades que aparecen en las parejas o grupos. realizando una sobre-interpretación de la información presente (deben querer decir...) o determinando nombres o lugares en función de otros motivos ajenos a lo que plantea el mensaje. Por ejemplo, a lo largo de la secuencia, casi todos los grupos receptores ubicaron correctamente el último niño del mensaje debido justamente a que era el último que quedaba por identificar, sin volver sobre la comprensión o coherencia de la información enviada para ubicarlo. Si las dificultades, contradicciones o ambigüedades que aparecen en los equipos, no son retomadas por el docente y sometidas a discusión, el acuerdo entre los componentes del equipo es suficiente en algunos casos para abandonarlas y avanzar.

Esto nos permitió determinar la necesidad de una reformulación de la secuencia en el sentido de precisar las intervenciones del docente; estas intervenciones deberían permitir la discusión y la determinación de acuerdos parciales que jalonen el desarrollo de la secuencia, pasando a convertirse en conocimientos acordados por todos y que favorezcan el avance en el aprendizaje. Por ejemplo, la utilización de la escalera como referencia objetiva para ubicar a Ramiro, debería ser discutida y acordada tempranamente; de la misma manera los modelos diferentes de orientación del tobogán que aparecen pueden ser explicitados después de los primeros intercambios de mensajes. Es necesario organizar actividades específicas relativas al establecimiento de acuerdos entre los equipos correspondientes, actividades de elaboración de nuevos mensajes dónde se pongan a prueba los acuerdos establecidos y de análisis posteriores para su reformulación. Por otra parte es necesario discutir y establecer con el docente criterios de selección de los mensajes más pertinentes para analizar y discutir la necesidad de acuerdos previos y a cómo se explicitan.

11 El diseño de la secuencia no explicitaba claramente cuáles podrían ser los recursos del docente para realizarlo.

La última parte de la secuencia, redactar un mensaje para una persona ajena al grupo escolar, exige encontrar formulaciones en las que puedan ser explicitadas las referencias utilizadas, dado que no se pueden acordar previamente, como podía ser el caso en el intercambio de mensajes entre los integrantes de una clase. Nuevamente es el docente quien debe organizar esta fase de la secuencia, dejando bajo la responsabilidad de los alumnos la determinación de tales referencias.

En conclusión, las dificultades en la elaboración y utilización de relaciones espaciales, en la explicitación de modelos de orientación y en la necesidad de proveer mayor información relativa por ejemplo, a la posición del observador, siguen presentes en alumnos de 3er. año. La situación Tobogán2 permite plantearlo claramente y lograr que los alumnos no sólo elaboren relaciones espaciales sino que cuestionen su validez para comunicar informaciones y evolucionen en sus conceptualizaciones sobre un tema tan complejo, porque como dijo José con aire un poco desconsolado: "Hay tantas derechas !!!"

Bibiografía

ARTIGUE, M (1988): Ingeniería Didáctica. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol 9 N°3

BERTHELOT, R. SALIN M.H. (1992): *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire* Tesis. Universidad de Bordeaux-Francia.

BROUSSEAU, GUY (1986): Fundamentos y Métodos de la Didáctica de la Matemática, en Serie B: *Trabajos de Matemática.* IMAF, Universidad Nacional de Córdoba.

COLINVAUX, D., DIBAR URE, C (1988) : Trabajando con adultos no alfabetizados. La construcción de la noción de espacio. En *Psicología Genética.* Miño y Dávila. Buenos Aires

LABORDE, COLETTE (1988) "L'enseignement de la géométrie en tant que terrain d'exploration de phénomènes didactiques" en *Recherches en didactique des mathématiques,* vol 9 N°3.

LURÇAT, LILIANE (1976) : *L'enfant et l'espace. Le role du corps* PUF. Francia

PIAGET, J, INHELDER, B.: *La representation de l'espace chez l'enfant.* Paris. PUF 1973

PIAGET, J. INHELDER,B., SZEMINSKA, A.: *La géometrie spontanée de l'enfant.* Paris. PUF. 1973

Capítulo 8: El aprendizaje de las matemáticas en la escuela secundaria: acceso de los estudiantes a ideas matemáticas importantes*

Teresa Rojano

8.1. Introducción

Este capítulo trata, desde diferentes perspectivas, el tema del acceso de los estudiantes de nivel secundario a ideas matemáticas importantes. Una de estas perspectivas está relacionada con los procesos cognitivos que se dan en las conceptualizaciones importantes, y con los que se presentan en la evolución de los niños a través de los temas de matemáticas escolares en este nivel educativo. El segundo enfoque está relacionado con el concepto de educación secundaria. Este concepto varía para cada país, no sólo respecto a la edad de los estudiantes, sino también en el énfasis que se ejerce sobre la función de este nivel educativo en la preparación de los estudiantes para su entrada a la educación preuniversitaria, o bien como la etapa final de la educación básica, que en muchos países representa la última etapa educativa para un gran porcentaje de la población. En este sentido, el enfoque determina el énfasis particular que se dará al contenido curricular. En un tercer enfoque se analiza la importancia que ha adquirido el uso de las nuevas tecnologías en los contenidos de la enseñanza matemática y en la organización del salón de clases. Por último, se comenta la inevitable perspectiva sobre la entrada al nuevo milenio ya que ha impuesto importantes reformulaciones sobre qué es lo que se debe enseñar, cómo enseñarlo y para qué. De acuerdo con algunos investigadores, el nuevo milenio será el escenario de nuevas exigencias de preparación matemática para todos y esto deberá considerarse para los estudiantes más jóvenes dentro del sistema escolar.

Las cuatro perspectivas presentadas dan origen a cuatro correspondientes elementos de investigación. En este capítulo se discutirán algunos de ellos y se prestará especial atención –desde la perspectiva de los procesos cognitivos y las influencias de las nuevas

---

* En English, Lyn (comp.), *Manual de investigación internacional en la educación de las matemáticas* (en prensa).

herramientas de aprendizaje en la educación de las matemáticas– a los puntos que podrían ser considerados como críticos para el impulso de nuestro conocimiento sobre factores claves que favorecerían (u obstaculizarían) el acceso de los adolescentes a poderosos conceptos matemáticos. Se tiene entonces que el contenido de este capítulo está estructurado de acuerdo con estas perspectivas y el trabajo de investigación relacionado. La segunda y cuarta perspectivas se combinan para presentar el contenido de la sección 8.4.

8.2. Procesos de transición en el pensamiento matemático del adolescente

Al hacer referencia al acceso de los adolescentes a las ideas matemáticas importantes, la palabra "importantes" se puede interpretar de varias formas. Por ejemplo, en términos de los procesos de transición que experimentan los adolescentes cuando empiezan a estudiar álgebra o geometría sintética, éstos los hacen conscientes del poder de la generalización al trabajar con "lo desconocido" (cantidades) y la verificación de conjeturas, ambos conceptos considerados ideas importantes ya que promueven los procesos de transición y permiten a los estudiantes acceder a niveles superiores al pensamiento específico, numérico y de percepción. Tenemos, por consiguiente, que las ideas importantes en las matemáticas no son necesariamente nociones avanzadas y poderosas, sino nociones clave que proporcionan un acceso real a estos conceptos. Por lo tanto, al menos en el contexto de los procesos de transición, las ideas matemáticas importantes adquieren un carácter relativo porque dependen de su capacidad de apoyar la evolución del pensamiento matemático del alumno hacia niveles más abstractos, formales y complejos. En las siguientes secciones analizaremos algunas ideas matemáticas importantes según se especificó anteriormente, esto es, en el contexto de los procesos de transición que se dan en el paso de la escuela primaria a la secundaria.

8.2.1. De la aritmética al álgebra

Durante mucho tiempo se pensó que el paso hacia el pensamiento algebraico se presentaba, en la mayoría de los estudiantes, entre las edades de 11 y 16 años. Esta suposición cambió hacia finales de la década de los 70 con los resultados presentados por autores como C. Kieran que investigaba la interpretación del signo de igualdad, tema esencial de investigación para la elaboración de posibles explicaciones a las dificultades de los estudiantes que empiezan a aprender álgebra simbólica (Kieran, 1981). El trabajo de Kieran y de otros investigadores (Matz, 1980; Booth, 1984), donde se analizaron los errores y malentendidos recurrentes en el estudio del álgebra, permitió establecer cómo la variación en el significado de los símbolos matemáticos durante la transición de la aritmética al álgebra representaba un obstáculo en la evolución de los sujetos hacia la adquisición del lenguaje algebraico. En la siguiente tabla se presenta este cambio en el significado de algunos símbolos que aparecen en las matemáticas escolares de primaria y secundaria.

Tabla 1

Símbolos	*Aritmética*	*Álgebra*
+, -	operaciones binarias; operaciones ejecutables con algoritmos aritméticos 3+4 = 7, 37–8 = 19	operaciones binarias; operaciones suspendidas 3+x, 2x-7y
		operaciones ejecutables con reglas algebraicas 3x+x-7x = -3x
		doble significado operación binaria, operación suspendida 8a-b operación binaria ejecutable en álgebra 23n-11n = 12n signo unitario: -7
	Operador: operaciones = resultado 12+7=19	equivalencia, igualdad restringida, igualdad funcional: 2(a+b) = 2a+2b 7x-4 = 28x+15 y = 3x-2
a, b, c,... n, ...x, y	área, volumen y fórmulas físicas b x h/2, v = x r^3, v = d/t	Cantidades desconocidas, variables y números generales
Concentración de caracteres	significado aditivo: 324 = 3 centenas, más 2 decenas, más 4 unidades	significado multiplicativo: 3a = 3 veces a

La tabla anterior muestra, de forma esquemática, cómo cambia el significado de los símbolos operativos al cambiar de un dominio del conocimiento al otro. Los símbolos + y -, que en la aritmética representan operaciones ejecutables con los algoritmos de la adición y la sustracción y que conducen a un resultado numérico, al pasar al campo del álgebra se convierten en términos que contienen literales, o que representan también operaciones suspendidas (en expresiones como 2x + 7), donde los algoritmos o las reglas de ejecución no necesariamente se aplican, o también representan operaciones ejecutables con reglas algebraicas (como en 3x + x – 7x) a través de las cuales se obtiene un resultado (-3x). En el álgebra, los símbolos + y – también pueden ser unitarios, como en el caso de los números relativos –7, +5, -32.

Por otra parte, debido a su cercana relación con los símbolos operativos, el símbolo = en la aritmética funciona como un operador que "transforma" el miembro izquierdo de una igualdad en un resultado numérico que aparece en el miembro derecho (como en 12 + 7 = 19). Sin embargo, en el álgebra, el símbolo = puede representar la equivalencia entre dos expresiones (como en 2 (a + b) = 2a + 2b) o puede representar una igualdad restringida, o ecuación (como en 7x – 4 = 28x + 15), o bien una relación funcional (como en y = 3x + 2). En la aritmética, las letras se utilizan casi siempre como etiquetas que evocan referencias muy específicas, pero que son susceptibles a sustitución numérica, como en las fórmulas geométricas (a = b x h, c = 2 r).

La concatenación de símbolos también obedece a diferentes convenciones dentro de la aritmética. La yuxtaposición de números como, por ejemplo, 324, corresponde a la notación en el sistema posicional y es aditiva: 3 centenas, más 2 decenas, más cuatro unidades. Por otro lado, en el álgebra "3a" tiene una interpretación multiplicativa: "3 veces a".

Durante la década de los 80, la investigación realizada sobre el pensamiento algebraico mostró que estas diferencias en el significado de los símbolos en sí y de las cadenas de símbolos pueden resultar en serias dificultades para los niños de secundaria que están aprendiendo álgebra. Esto nos indica que, para propósitos educativos, el álgebra no debe continuar concibiéndose como una "extensión de la aritmética". Por su parte, a finales de la misma década, en el área de la investigación se dio gran importancia al enfoque sobre la evolución del conocimiento matemático escolar basado en la superación de los obstáculos didácticos de origen epistemológico. En el caso específico del álgebra escolar, este enfoque está ligado con los cambios antes mencionados sobre la importancia asignada a los símbolos y las acciones que representan (Filloy y Rojano, 1996).

Además del hábito formado sobre las interpretaciones de los símbolos aritméticos, las dificultades que las interpretaciones y acciones del lenguaje natural generan en el momento en que los alumnos inician el estudio del álgebra, también se han estudiado (Freudenthal, 1983). Un ejemplo clásico de esto es que la escritura de izquierda a derecha, característica de los lenguajes como el español y el inglés, incluye a la escritura del álgebra, de tal manera que los estudiantes tienden, por ejemplo, a escribir una cadena de igualdades en vez de expresar el reestablecimiento de la igualdad en cada paso de transformación durante las tareas de resolución de la ecuación:

Problema: Resolver la ecuación 2x + 7 = 18x – 9

Reestablecimiento de la igualdad (secuencia vertical):

$2x + 7 = 18x - 9$

$7 + 9 = 18x - 2x$

$16 = 16x$

$x = 16/16$

$x = 1$

Cadena de igualdades (secuencia de izquierda a derecha; generalmente utilizada por principiantes en el álgebra):

$2x + 7 = 18x - 9 = 18x - 2x$...

A continuación se muestra cómo trabajó una niña de 13 años (Matilde), que acababa de aprender a resolver ecuaciones lineales utilizando un modelo concreto (geométrico). Estos son sus primeros pasos en el dominio de la sintaxis del álgebra durante una entrevista (Filloy y Rojano, 1989):

Ecuación a resolver: $129x + 51 = 231x$

Matilde escribió: $129x + 51 = 231x - 129x = 102$

M: "Por lo tanto, x es igual a dos".

La secuencia de igualdades, escrita de izquierda a derecha, tiene sentido en las transformaciones tautológicas (identidades algebraicas) pero no en los problemas de resolución de ecuaciones. Esto confunde a los estudiantes, ya que no poseen los criterios para discriminar las situaciones matemáticas donde es posible actuar como en otros dominios de lenguaje (la aritmética o los lenguajes naturales). Este tipo de dificultades con las reglas de la escritura algebraica, que son parcialmente la consecuencia de convenciones lingüísticas del lenguaje natural, también se pueden explicar en términos del orden temporal que tiende a gobernar la secuencia de acciones o, como en el caso de Matilde, por el orden de las acciones realizadas en un método concreto de enseñanza, que se transfieren a las acciones de transformación de una ecuación.

Se han realizado múltiples investigaciones sobre las dificultades que presentan los estudiantes para entender y utilizar el lenguaje algebraico como consecuencia del uso de sus lenguajes diarios y de sus nociones previamente adquiridas, como la aritmética y la lengua materna. Entre estos estudios se encuentran algunos que van desde lo clínico e histórico-epistemológico (Filloy y Rojano, 1984, 1989; Rojano, 1996), hasta disertaciones teóricas con un énfasis en los planos cognitivos (Sfard y Linchevsky, 1994; Hershkovics y Linchevsky, 1994), lingüísticos o semióticos (Krishner, 1987; Drouhard, 1992; Arzarello, 1995; Puig y Cerdán, 1990; Lins, ...) y estudios piloto o de trabajo experimental (Cortes, 1995; Bell, 1996; Bednarz y Janvier, 1996, Bednarz, Radford, Janvier y Leparge, 1992; Stacey y MacGregor, 1995; Kieran *et al.*, 1996; Rojano y Sutherland, 1993). Algunos de estos autores han señalado la existencia de saltos o brechas conceptuales que representan las fronteras entre el pensamiento algebraico y el aritmético, y le dan gran importancia al estudio de los posibles enfoques de enseñanza que ayuden a los estudiantes a superar los obstáculos de aprendizaje que aparecen al cruzar estas brechas. En resumen, los autores sostienen que:

- Los estudiantes nuevos tienen dificultades para trabajar con "lo desconocido", es decir, con cantidades desconocidas. Existen pruebas sobre la incapacidad de los estudiantes de extender, de manera espontánea, las acciones que realizan para encontrar el valor de x en una ecuación del tipo $Ax \pm B = C$ (donde A, B y C son números conocidos), hacia ecuaciones del tipo $Ax \pm B = Cx \pm D$, ya que en esos casos es necesario operar con "lo desconocido", es decir, con los términos que contienen a x (Filloy y Rojano, 1989). Sfard y Linchevsky explican este fenómeno en términos de la dualidad proceso-objeto y de la transición de lo operativo a lo estructural a través de la materialización y señalan que este paso constituye una fuente de enormes dificultades para los estudiantes que están empezando a aprender álgebra (Sfard y Linchevsky, 1994).
- La resolución de problemas de palabras, que en el álgebra incluye específicamente la traducción de un texto al código algebraico, representa otra dificultad para los estudiantes en este nivel. El trabajo de Stacey y MacGregor (1993), así como las investigaciones de Bednarz *et al.* (1996), ilustran claramente este salto cognitivo. Por otro lado, Puig y Cerdán (1990) utilizan métodos clásicos (el método análisis-síntesis y el método cartesiano) para establecer las diferencias existentes entre los problemas aritméticos y los algebraicos y caracterizarlas.
- La mayoría de los estudiantes de nivel secundario no pueden conectar por sí solos los dominios de conocimiento que constituyen, por un lado, el álgebra manipulativa y por otro, el álgebra instrumental para la resolución de problemas. Rojano y Sutherland (1993) mostraron cómo los estudiantes logran conciliar ambos aspectos del álgebra a través de códigos intermedios (entre el lenguaje natural y el álgebra), similares a los códigos algebraicos, en los cuales están presentes los referentes que provienen del contexto del problema (véase la sección 3.2.2. para una explicación detallada y el método de las *Hojas de cálculo* para resolver problemas de palabras).
- El estudio del álgebra como lenguaje, tanto desde las perspectivas de la semiótica y la pragmática (Filloy y Puig) como de la lingüística (Kirshner, Drouhard, Arzarello), revela características intrínsecas que pueden convertirse en obstáculos para los usuarios que desean dominar este lenguaje.
- Una introducción temprana al álgebra revela que el desarrollo adecuado del sentido operativo (adición) permite a los estudiantes de nivel primario experimentar los procesos de transición hacia una forma de pensar algebraica, por ejemplo, a través de la adición de cantidades desconocidas o números arbitrarios (Slavit, 1999).

En resumen, la investigación que se realizó hasta la década de los 80 nos advierte sobre las dificultades que enfrentan los estudiantes en su tránsito al pensamiento algebraico y sugiere la necesidad de estudiar a profundidad la naturaleza de los obstáculos didácticos, cognitivos y epistemológicos que conducen a estas dificultades. Por otra parte, esta investigación nos refiere a la enorme influencia que las tendencias basadas en el uso cotidiano del lenguaje natural y en el hábito de la forma aritmética de pensar tienen en la interpretación de los estudiantes y en su producción de símbolos algebraicos, así como en la manera en que los estudiantes aprenden los métodos de resolución de problemas algebraicos.

Por otra parte, en investigaciones posteriores se pudo observar una tendencia a contestar preguntas planteadas en otros estudios. Éstas esclarecen la naturaleza de las dificultades en la adquisición del lenguaje algebraico. Por ejemplo, la investigación sobre una introducción temprana al álgebra y el uso de formas intermedias de expresión y operación (entre lo aritmético y lo algebraico) para acercar el álgebra manipulativa con la resolución de problemas (Noss, 1986; Hoyles y Sutherland, 1989; Hershcoviks y Linchevsky, 1994; Brown *et al.*, 1999; Goodson-Espy, 1998).

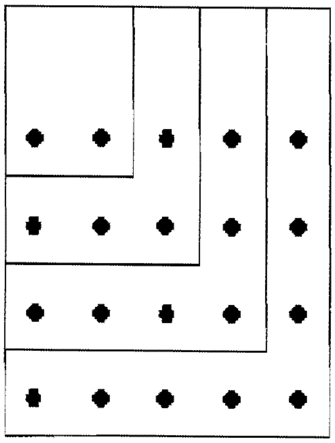
En ambos casos, los resultados obtenidos sugieren nuevos caminos que permitirán continuar la investigación. Por ejemplo, quedan varias preguntas sin responder sobre el lenguaje algebraico "en uso" y sobre las rutas de transformación que existen entre los métodos intuitivos del niño y los métodos escolares para la resolución de tareas algebraicas.

8.2.2. Del pensamiento específico al general

El tránsito de lo específico a lo general está presente en diferentes grados en todas las tareas matemáticas escolares, ya que la generalidad y, por tanto, la generalización, son endémicas al quehacer y aprendizaje matemático (Mason, 1989 y 1996). Sin embargo, este paso se enfatiza en particular en el nivel de escuela secundaria dado que los estudiantes ya son capaces de acceder a representaciones simbólicas (algebraicas) que les permiten alcanzar un nivel manipulativo de la generalidad. Los procesos de generalización (el paso de lo específico a lo general) en las matemáticas escolares se pueden ilustrar con el "ciclo de generalización" (Mason *et al.*, 1985):

- Percepción de la generalidad (reconocimiento de un patrón, por ejemplo, en secuencias numéricas).
- Expresión de la generalidad (dilucidar la regla general, verbal o numérica, para generar una secuencia).
- Expresión simbólica de la generalidad (obtener una fórmula que corresponda a la regla general).
- Manipulación de la generalidad (resolución de problemas relacionados con la secuencia).

Figura 1



El dibujo de la izquierda representa un grupo de rectángulos superpuestos.

El primero contiene 2 puntos.

El segundo contiene 6 puntos.

El tercero contiene 12 puntos.

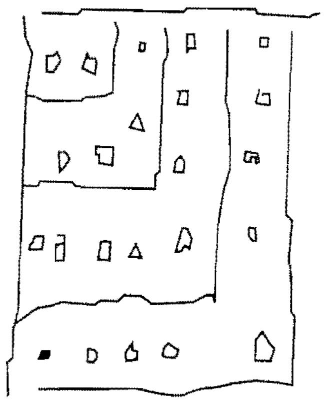
El cuarto contiene 20 puntos.

¿Cuántos puntos hay en el 5° rectácgulo?

¿Cuántos puntos hay en el 100° rectángulo? ¿Cómo lo sabes?

¿Cuántos puntos hay en el n rectángulo? ¿Cómo lo sabes?

Figura 2

"¿Cuántos ... 100°?" $100 \times 99 = 9900$ $100 \times 101 = 10100$ Se multiplica el número de puntos horizontales por el número de puntos en línea vertical	– Habrá 30 puntos en el 5°. – $100 \times 99 = 9900$ en el 100°. – Habrá $n \times (n + 1) = n^2 + n$ puntos
30 9702	El espacio en blanco No puedo conceptualizarlo
$6.5 = 30$ puntos en el 5° triángulo $7.6 = 42$ Para R = Z para N A = R* (R-1) Siguiente R o Para R = 1 para N A = R* (R+1) Siguiente R $N = A\,(A+1)$ $N = A^2+A$ $5° = 5^2+5$ $5° = 30$ $1° = 1^2+1$ $1° = 2$	

Digitalizado por: I.S.C. Hèctor Alberto Turrubiartes Cerino
hturrubiartes@beceneslp.edu.mx

Algunos autores han criticado intensamente la precipitación por aplicar los símbolos en estos ciclos mientras se realizan tareas de generalización en el salón de clases (Lee, 1996; Mason, 1996). Aparentemente, existe una tendencia en la enseñanza por abreviar los primeros dos pasos y esto, en muchos casos, hace que el estudiante no pueda producir una ecuación algebraica adecuada para el problema planteado. Lee (1996) analiza como ejemplo un estudio experimental con adultos donde, debido a la percepción de problemas en el patrón de reconocimiento, era imposible encontrar una ecuación algebraica que permitiera a los participantes completar con éxito la tarea asignada. Este ejemplo se reproduce de la siguiente manera (*el problema del rectángulo punto*) [las figuras se tomaron de *Initiation into algebraic culture generalization*, L. Lee, en Bednarz, Kieran y Lee (Eds.), 1996].

En este caso, centrarse en los patrones de los bordes correspondientes a la secuencia numérica 2, 4, 6, 8 no condujo a los participantes a la ecuación general porque se enfrentaron con un conflicto cuando se les proporcionó el rectángulo/puntos para los primeros cuatro rectángulos. Se podría esperar que la existencia de esta tabla de equivalencia evitara que los participantes se concentraran en el patrón gráfico incorrecto. Sin embargo, como lo demuestra el estudio de Lee, esto no sucedió en todos los casos.

El segundo ejemplo, en el cual el diseño de la tarea contempla el rol de las representaciones algebraicas en la manipulación de la generalidad, claramente ilustra la brecha existente entre la teoría y la práctica. Esta brecha puede explicarse a través de alguna de las diversas peculiaridades de los procesos cognitivos en el pensamiento matemático, consistentes en su relación cercana con las preferencias individuales por diferentes modos de representación (en este caso: diagramático, verbal, numérico y simbólico-algebraico). La existencia de estas preferencias se documenta en detalle en Molyneux, Rojano, Sutherland y Ursini (1999). En el estudio (*ibid.*) anglo/mexicano "School based mathematical practices in the science classroom" (1), las diferencias mencionadas (que, en este caso, también pueden incluir la preferencia por representaciones gráficas) se atribuyen parcialmente a las diferencias en las culturas escolares detectadas entre los grupos de estudiantes que participaron en el estudio en México e Inglaterra.

La existencia de tendencias cognitivas, tales como la preferencia por una forma de representación determinada, no debilita el argumento teórico que establece que las representaciones algebraicas permiten el cálculo de la generalidad al grado que es posible resolver una amplia gama de problemas relacionados con la situación de generalización que se plantea. Por lo tanto, tendríamos que, por ejemplo, en una secuencia de números o cifras gobernadas por un patrón general, la expresión algebraica del elemento n-ésimo puede llevar a determinar el lugar de un elemento con un valor numérico dado en la secuencia; o a calcular el valor específico del elemento para un lugar determinado (posibilidad de predicción), o a analizar las tendencias, progresivas y regresivas (posibilidad de apreciación global). Si se toma esto en cuenta, resulta relevante determinar cuáles son las condiciones que hacen posible promover la conciencia y apreciación del alumno del valor del código algebraico en las tareas de generalización. Específicamente, sería interesante investigar si un uso adecuado del ciclo de generalización en la enseñanza puede apoyar esta conciencia.

En este nivel escolar, en el área de resolución de problemas de palabras, la transición a lo general se da cuando se produce una expresión algebraica (que puede ser una ecuación o una expresión funcional) que sintetiza las relaciones entre los datos y las cantidades desconocidas (ecuación) o entre las variables (función) dentro del planteamiento de un problema. En este caso particular, esto significa que los estudiantes se ven obligados a enfrentarse a las dificultades relacionadas con el proceso de traslación del texto del problema al código algebraico, y a las dificultades relacionadas con el proceso de resolver las ecuaciones correspondientes. Este proceso se conoce comúnmente como el método cartesiano, en el cual colocar los elementos de un problema en una ecuación se reconoce como la matematización del problema. Varios estudios realizados utilizando hojas de cálculo para ayudar a los estudiantes a resolver problemas que típicamente se resuelven mediante el método cartesiano, demuestran que en el ambiente computacional es posible utilizar un lenguaje intermedio (entre el natural y el algebraico) para expresar de manera general las relaciones existentes entre los datos y las cantidades desconocidas, con la posibilidad de cambiar el valor de las cantidades desconocidas para encontrar una respuesta (Rojano y Sutherland, 1993; Sutherland y Rojano, 1993).

Cuando los estudiantes utilizan el método de hojas de cálculo para resolver problemas verbales, capturan en la hoja de cálculo la información contenida en el planteamiento del problema y dan a cada columna un nombre que esté relacionado con los elementos de este planteamiento. Posteriormente, introducen fórmulas escritas en Excel que expresen las relaciones entre los datos y lo desconocido. Al variar el valor numérico de uno de los elementos desconocidos (sin importar cuál sea la variable independiente en el conjunto de fórmulas), se llega a la solución a través de un proceso de prueba y refinamiento (la Figura 3 muestra un ejemplo de este método para resolver el *Problema del Teatro*). En este método las fórmulas de Excel constituyen un lenguaje intermedio entre los lenguajes naturales y algebraicos y su construcción proviene de un proceso de análisis del problema (Rojano, 1996b). En el caso particular del *Problema del Teatro* podemos identificar los elementos desconocidos básicos: el número de boletos para niños y para adultos. Dado que hay 100 boletos más de niños que de adultos (número de boletos de niño = número de boletos de adulto + 100) se recomienda que en el método de la hoja de cálculo el número de boletos de adulto se escoja como el elemento desconocido "libre" que se variará. De esta manera, una de las celdas de la hoja de cálculo (A1) se etiqueta como *número de boletos de adulto*, y el número tentativo para el valor de este elemento desconocido se introduce en la celda A2. Este número podría ser, digamos, 10. El segundo número desconocido, *número de boletos de niño,* se escribe en B1 y la fórmula correspondiente se introduce en B2 (= A2 + 100), que representa la relación de éste con el anterior (en A2). En las celdas C2 y D2, se insertan respectivamente las fórmulas para el costo total de boletos de adulto (B2 x 120) y boletos de niño (C2 x 80). Se introduce una fórmula para las ganancias totales en E2 (= C2 + D2). La hoja de cálculo permite que con un cambio en el dato numérico de A2 (uno de los elementos desconocidos) los valores numéricos de las celdas que contienen las fórmulas cambien de manera automática. De esta manera, el dato de A2 puede variarse continuamente hasta que el valor de 30,000, que es una de las restricciones del problema, aparezca en E2. No es difícil darse cuenta de que, al introducir 110 en A2, se cumple esta restricción y, por lo tanto, el otro valor desconocido (B2) sería 210.

Figura 3. El problema del teatro

Los boletos para una función de teatro cuestan: $120 para adultos y $80 para niños. Se vendieron 100 boletos más para niños que para adultos. ¿Cuántos boletos para adultos y cuántos boletos para niños se vendieron, si en total se recolectaron $30 000?

Use la hoja de cálculo para resolver este problema.

A
B
C
D
E
1

Número de boletos para adultos

Número de boletos para niños

Costo de los boletos para adulto

Costo de los boletos para niño

Costo total de los boletos

2

Asumamos que 10 adultos van al teatro.

¿Cuánto dinero se recolecta si van 10 adultos al teatro? $____________

Cambia el número (boletos para adultos) en la celda A2.

¿Cuántos boletos para adulto se vendieron?

¿Cuántos boletos para niño se vendieron?

Figura 3. Método de hoja de cálculo para resolver problemas (hoja de trabajo usada en el proyecto anglo-mexicano, aquí escribimos debajo las fórmulas que se espera que los niños anoten en las celdas).

De esta manera, se proporciona a los estudiantes una herramienta que les permite pasar gradualmente de un enfoque aritmético de resolución de problemas (enfoque numérico, centrado en la especificidad de los datos) a un método algebraico.

Sin embargo, la investigación sobre qué tan viable resulta combinar el método de la hoja de cálculo con el proceso de elaboración de ecuaciones, y por tanto, con el método algebraico, sigue pendiente (Rojano, 1999 AERA PAPER). Una de las principales ventajas de dominar este método algebraico es la oportunidad que brinda esta capacidad para identificar conjuntos de problemas que se pueden resolver utilizando la misma ecuación o sistemas de ecuaciones. Esto incluye otro tipo de generalización: la generalización del método.

8.2.3. De métodos informales a métodos formales de resolución de problemas

El uso frecuente de métodos intuitivos o "personales" entre la población estudiantil que va de los 11 a los 16 años de edad se discute en múltiples estudios, desde las primeras encuestas sistemáticas sobre los errores más comunes de los estudiantes en el álgebra (Booth, 1984; Matz, 1990), hasta las investigaciones más recientes sobre la resolución de problemas de palabras (Bednarz *et al.*, 1996; Rojano y Sutherland, 1993). El uso de este método se atribuye, por una parte, a la dificultad que traen consigo los métodos utilizados en el nivel secundario –por ejemplo, el método algebraico, la justificación geométrica, la argumentación lógica, la validación del pensamiento probabilístico– y, por otro, las experiencias de los estudiantes con sus "propios" métodos como camino que eventualmente los conduce a la respuesta correcta. Estos resultados han generado mucha presión entre los investigadores, educadores y diseñadores de programas de estudio por incluir los métodos propios de los niños como antecedentes imprescindibles al aprender sobre métodos escolares. Al respecto, se pueden identificar dos posibles intenciones pedagógicas: la usual, que tiende a reemplazar los métodos de los niños con los métodos escolares y otra, que puede ser considerada revolucionaria, que tiende a institucionalizar gradualmente algunos de los métodos más parecidos a los de los niños. Un ejemplo de lo anterior es el método de "prueba y refinamiento" que los estudiantes utilizan con frecuencia para resolver ecuaciones. Con base en los descubrimientos de la investigación que recomienda que se consideren los métodos informales de los niños, se ha incorporado en la práctica escolar de algunos países como Inglaterra (Sutherland, 1999; *The Royal Society*, 1997) una versión sistematizada del método de prueba y refinamiento que incluye, además, el uso de calculadoras. Sutherland se refiere al informe de 1997 de la *Royal Society* (*ibid.*) que analiza la confusión que resultó de la incapacidad de identificar la mera manipulación de los símbolos como una actividad algebraica y de la caracterización del método de prueba y mejora como "algebraico", al grado que los estudiantes han empezado a creer que este es el método oficial. El autor sostiene que esta reforma aparentemente bien intencionada, centrada en el estudiante, ha obstruido el acceso del estudiante a poderosas herramientas cognitivas matemáticas que se han desarrollado a través de los siglos (Sutherland, 1999).

En lo que respecta a qué se debe hacer para tomar en cuenta los métodos propios de los niños, es posible establecer que el acceso a otros tipos de métodos para la resolución de problemas de palabras utilizando ambientes de cómputo como hojas de cálculo, permite que se tome una posición menos radical, una media entre las dos antes descritas que están claramente situadas en los dos extremos. En el método de las hojas de cálculo (descrito en la sección 8.2.2.) se puede encapsular una relación matemática moviendo el *mouse* (o las teclas con flechas) sin una referencia explicita al simbolismo utilizado en ellas (Sutherland y Rojano, 1993, JMB PAPER). Por lo tanto, la hoja de cálculo ayuda al estudiante a representar y probar relaciones matemáticas sin tener que lidiar con el lenguaje simbólico, pero puede ver esta relación representada simbólicamente en la hoja (fórmulas de la hoja de cálculo). Es probable que las relaciones algebraicas estén relacionadas de manera cercana con el dominio numérico y en este sentido la hoja de cálculo proporciona un contexto para hacer una generalización de las estrategias informales aritméticas y sistematizadoras de los alumnos. El paso definitivo hacia el método algebraico o cartesiano, que explícitamente asume una traslación del contenido de palabras del problema al código algebraico. no puede dejar de tomar en cuenta las diferencias existentes entre este método y el método de la hoja de cálculo. Mientras que en el método cartesiano la parte en que se transcribe el problema a forma de ecuación corresponde a la acción de encontrar dos expresiones algebraicas equivalentes para las condiciones del problema (esta equivalencia es local y emerge de las restricciones del planteamiento del problema), y después vincular estas expresiones a través del signo de igualdad, en el método de las hojas de cálculo todas las relaciones parciales (o elementales) entre elementos dados y desconocidos y entre elementos desconocidos se representa en celdas separadas pero relacionadas. Todas estas relaciones finalmente se sintetizan en una expresión que sirve como control de variación de uno de los elementos desconocidos. Por otro lado, la solución de la ecuación en si misma a través del método cartesiano no tiene una equivalencia con ninguna de las partes del método de la hoja de cálculo, ya que para encontrar la solución numérica del problema en la segunda, se tiene que variar el dato de la celda que represente la cantidad desconocida, lo cual consiste en un método puramente numérico. Por lo tanto, un proyecto didáctico que pretenda apoyarse en el método de las hojas de cálculo y que esté dirigido a acercar a los estudiantes al método cartesiano, deberá diseñar un vínculo entre la representación de las relaciones de los elementos del problema en el código de la hoja de cálculo y hacer funcionar la ecuación, y hacerlo de tal manera que se pueda resolver utilizando las técnicas del álgebra manipulativa. Sin embargo, la investigación centrada en la inclusión de los métodos intuitivos de los niños a los métodos escolares sigue en sus primeras etapas. En el trabajo sobre las hojas de cálculo, la investigación conjunta anglomexicana "*Mathematical Modeling with Spreadsheets*" (Rojano y Sutherland, 1997; Rojano y Sutherland, 1999) propone algunos resultados preliminares.

8.2.4. Del dibujo a la figura (geométrica)

Algunos programas de matemáticas contemplan iniciar a los estudiantes en la geometría sintética. Esto presupone un intenso trabajo previo con los objetos geométricos y sus propiedades durante las tareas de experimentación y razonamiento inductivo. Es claro que esto supone que la dificultad de cambiar del trabajo con la percepción (dibujos) al trabajo con lo conceptual (la (figura) geométrica) se ha superado. Existen pruebas concluyentes sobre el pequeño porcentaje de estudiantes que logran hacer esta transición, particularmente si sus experiencias de aprendizaje geométrico sólo incluyen tareas de papel y lápiz, ya que esto implica mayores exigencias cognitivas que, por ejemplo, explorar y experimentar en entornos geométricos dinámicos. La fuente principal de problemas durante la transición de lo relacionado con la percepción a lo conceptual es la confusión del estudiante generada por el discurso (geométrico) que se refiere a las figuras que utilizan la maestra y el libro de texto. Este discurso no necesariamente corresponde con la interpretación del estudiante de estas figuras o con las propiedades que les asignan los estudiantes para aislar las particularidades de los dibujos y para distinguir sus propiedades invariantes de manera que se logre la conceptualización. La atención del estudiante a las características invariantes de las figuras geométricas se ha visto favorecida últimamente por el aumento en geometría dinámica, desarrollada con el apoyo de los medios computacionales. Actualmente, existe la posibilidad de desarrollar geometría experimental en las escuelas a través de entornos computacionales que permiten a los estudiantes manipular directamente los objetos geométricos (como el *Cabri-Geometre*) para realizar tareas de formulación y pruebas conjeturales. Otros tipos de entornos computacionales (como el tutorial de geometría Anderson) se han diseñado para facilitar el aprendizaje de las demostraciones en matemáticas. Según Balacheff y Kaput (1996), la tarea didáctica de conectar las experiencias desarrolladas por los estudiantes en estos tipos de entornos que les permita reconciliar el razonamiento deductivo y el inductivo sigue pendiente. Esta tarea será el centro de interés de la enseñanza de la geometría en el nivel secundario especialmente si se incluye la transición a la geometría sintética y a la demostración.

Otros aspectos sobre la educación a este nivel son el sentido espacial y, en general, el sentido de la geometría tridimensional. En este nivel, el rol de la visualización se vuelve crucial.

Una fuente más de problemas para los estudiantes de geometría en su transición a lo conceptual es su falta de previa educación visual que podría ayudar en la sistematización de sus experiencias visuales, por ejemplo, en la búsqueda de patrones o en la distinción entre el rol de los dibujos como objetos geométricos o como modelos diagramáticos de estos objetos. Esta distinción está basada en el doble rol de las figuras (como en Laborde, 1993). Esta falta de entrenamiento visual durante el jardín de niños y la escuela primaria tiene un impacto severo sobre otro aspecto fundamental de la educación a nivel secundario: el sentido espacial y, en particular, la geometría tridimensional. En esta área el rol de la visualización se vuelve esencial. Una investigación llevada a cabo por Razel y Eylon (1990) con grupos de estudiantes en niveles preescolar y primario, sugiere que los estudiantes que tienen acceso y experimentan con medios didácticos visuales desarrollan una habilidad para identificar conceptos visuales en contextos complejos (por ejemplo, pueden reproducir los patrones percibidos en una cierta representación como diferentes tipos de representaciones) así como para aplicar estos conceptos en situaciones visualmente complejas. Estos investigadores también estudiaron la forma en la cual las experiencias visuales influyen en el desarrollo de conceptos matemáticos como la razón y la proporción (Razel y Eylon, 1990). Ellos (*ibid.*) demostraron la importancia del entrenamiento visual como antecedente al aprendizaje de la geometría en la escuela secundaria. Quedaría pendiente un estudio que determine de manera precisa los procesos de transición hacia la matematización en la geometría (tanto inductiva como deductiva) a nivel secundario, empezando por las experiencias visuales en la escuela y su efecto en el pensamiento abstracto y lógico del niño. En particular, sería importante investigar a qué grado las experiencias visuales (incluso si son necesarias para el desarrollo de ciertas habilidades geométricas) pueden provocar una dependencia de los aspectos visuales de los objetos geométricos y convertirse eventualmente en un obstáculo que impida el progreso hacia el conocimiento geométrico que requiere de un razonamiento más abstracto y deductivo.

8.2.5. Hacia un pensamiento abstracto

Existe una tendencia común de presentar la necesidad de que los estudiantes mayores de 11 años evolucionen hacia nociones y procesos matemáticos más abstractos. Por ejemplo, casi todos los procesos de enseñanza de álgebra presuponen los procesos de abstracción matemática que no siempre son presentados de manera explícita al maestro en las propuestas concretas. En contraste, hay una amplia variedad de estudios teóricos que tienen que ver con la abstracción en las matemáticas y van desde los que consideran la abstracción como un proceso de descontextualización hasta aquellos que niegan la descontextualización como medio para alcanzar los niveles más abstractos de pensamiento. Hershkowics *et al.* (1999) proporcionan un análisis detallado de estos estudios y señalan las propiedades que caracterizan cada uno de estos enfoques y que conducen a estas diferencias conceptuales. Por ejemplo, se refieren a la noción de *abstracción reflexiva* (utilizada por Piaget como el fundamento de su teoría cognitiva del desarrollo) que, transferida al dominio de las matemáticas, corresponde al tránsito de la *acción* a la *cognición* (en la teoría de Piaget), al tránsito de *la situación del problema* a las matemáticas (proceso de matematización). Esta adaptación de la *abstracción reflexiva* de Piaget a la abstracción en las matemáticas se presentó en el trabajo de Vergnaud sobre la matematización. Vergnaud (1982) concibe a esta última como el *proceso de descontextualización progresiva* a través del cual las matemáticas se apartan de la *situación del problema*.

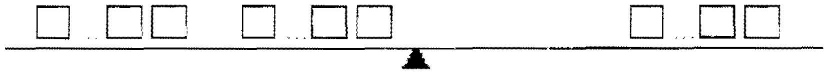
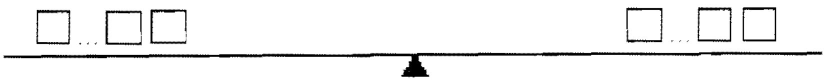
Hershkowics *et al.* (1999) colocan estos estudios en el lado opuesto de los estudios que niegan que la abstracción sea una separación de los referentes (por ejemplo, Mason, 1989) o de los que critican el concepto de la abstracción como una actividad mental en la cual se hace caso omiso del rol del entorno, tanto en las interacciones sociales como con las herramientas (Greeno, 1997). A pesar de que uno podría estar de acuerdo (o en desacuerdo) con Hershkowics *et al.*, no es difícil aceptar la gran brecha que los autores observan entre la investigación empírica y experimental y los procesos de abstracción, específicamente en el área de enseñanza de las matemáticas. Sin embargo, entre los estudios desarrollados en esta dirección, se puede mencionar el trabajo de Mason, que es de gran relevancia para las prácticas en el salón de clases ya que analiza el rol de la generalización en el aprendizaje del álgebra (Mason, 1996) y su relación con la abstracción y simbolización matemáticas. Mason sostiene que "si los maestros no están conscientes de su presencia [presencia general] y no tienen la costumbre de hacer que los estudiantes se esfuercen por expresar sus propias generalizaciones, entonces no se está presentando el pensamiento matemático" (Mason, 1996, en Bednarz *et al.*, página 65). Otro ejemplo es el trabajo de Filloy que trata el tema de la abstracción en el aprendizaje del álgebra a través del análisis de varias observaciones sobre los procesos de "modelación concreta" en un momento de transición (de la aritmética al álgebra). Los enfoques centrales de este trabajo incluyen: *a*) el rol que desempeñan los lenguajes o medios de expresión "más concretos" en la modelación de situaciones "más abstractas" y *b*) el rol de la "modelación concreta" en la producción del código algebraico necesario para desarrollar capacidades de resolución de problemas (Filloy, 1999; Filloy y Sutherland, 1996, p. 149).

Filloy se refiere específicamente a los procesos que aparecen cuando se interviene deliberadamente la enseñanza de la sintaxis algebraica utilizando un "modelo concreto" como el de equilibrio. La meta es que los estudiantes eventualmente asocien las acciones en este modelo con las acciones aplicadas a otros elementos de la ecuación dada. De esta forma, las acciones encaminadas a encontrar el valor desconocido (el valor de la cantidad desconocida) siguiendo la situación del modelo puede relacionarse con la transposición de términos en la ecuación (véase la Figura 4).

La observación de estudiantes del segundo grado de secundaria que trabajan sobre el modelo de equilibrio condujo a la detección de tendencias cognitivas individuales. Por un lado, algunos estudiantes mostraron una preferencia por el nivel sintáctico del álgebra. Una vez que los niños con esta tendencia identificaron en la ecuación las acciones que se realizaron sobre los elementos del modelo, abandonaron el modelo en las primeras etapas de trabajo y se concentraron en las actividades sobre la ecuación con una sintaxis parcialmente construida. En el otro extremo, algunos estudiantes mostraron una tendencia a anclar sus acciones al modelo, y tuvieron dificultades para abandonar los significados de los referentes que tenían los elementos de la ecuación (Filloy y Rojano, 1989). El segundo caso presenta varias preguntas al investigador entre las cuales la consideración de las tendencias cognitivas del sujeto debe incluirse para incrementar nuestro conocimiento sobre los procesos de abstracción que tienen lugar durante situaciones específicas de enseñanza.

Figura 4

Usar el modelo de equilibrio para resolver la ecuación:
$18x + 224 = 130x$

Acciones en el modelo:	Acciones en la ecuación:
Primer paso: trasladar los elementos de la ecuación al modelo.  18 objetos con igual peso (desconocido). 224 objetos con igual peso (conocido). 130 objetos con igual peso (desconocido. *Segundo paso:* remover por pares los objetos de peso desconocido, manteniendo el equilibrio, hasta que no quede ninguno en el platillo del lado izquierdo  224 objetos 130 – 18 = 112 objetos	$18x + 224 = 130x$ $224 = (130-18)x$ $224 = 112x$ Resolver la ecuación: simplificada $112x = 224$ $x = 224 \div 112$ Verificar la solución: $x = 2$

Tercer paso: escribir la nueva ecuación. 112x = 224 *Cuarto paso:* resolver la ecuación simplificada. x = 224 ÷ 112 *Quinto paso:* verificar la solución. x = 2	

8.3. Tecnologías de información y de comunicación: su influencia en los contenidos, la educación del docente y la organización del salón de clases

El surgimiento de los nuevos entornos de aprendizaje basados en computadoras así como el uso de las calculadoras gráficas han hecho posible que los niños tengan acceso a ideas matemáticas avanzadas que no serían accesibles a edades tempranas con las herramientas tradicionales de aprendizaje. Entre la gran variedad de proyectos de desarrollo de investigación y educativos que actualmente proponen la incorporación de las tecnologías de información y comunicación (TIC) en la escuela secundaria, se pueden identificar dos tendencias principales respecto a cómo se debe utilizar la tecnología. La primera se centra en ayudar a los alumnos a enfrentar las dificultades típicas que conlleva el aprendizaje de contenidos específicos de enseñanza, y en esta forma progresar hacia el logro de las metas del sistema educativo· la segunda se centra en acercar a los estudiantes a las nociones y contenidos matemáticos que generalmente van más allá de los límites de los planes de estudio y metas educativas del nivel secundario. Por lo general, el contenido está relacionado con las matemáticas avanzadas que se incluyen en los programas de educación media superior y superior. La segunda tendencia incluye el uso de aplicaciones de modelación y simulación, así como diferentes tipos de bases de datos (gráficas, tablas). Según Balacheff y Kaput (1996) esta tendencia revela una nueva etapa que contrasta con las previas (centradas básicamente en facilitar el uso de los formalismos tradicionales como la manipulación de expresiones algebraicas y graficación de funciones) ya que su intención es conectar las experiencias personales de los estudiantes con el mundo físico (a través de modelos de simulación) y con la experiencia matemática (a través de bases de datos, gráficas, tablas). *SimCalc–MathWorlds* es un entorno de cómputo que proporciona este vínculo y permite el diseño de tareas que pueden hacer accesibles las matemáticas de variación y cambio a los estudiantes aunque no hayan sido introducidos a la simbolización algebraica típicamente requerida como el lenguaje básico para el cálculo. En este entorno, es posible ayudar a los estudiantes a pasar de la manipulación de un fenómeno simulado de movimiento a representaciones más abstractas y esquemáticas y continuar trabajando con estos fenómenos utilizando modelos de abstracción intermedia (Balacheff y Kaput, 1996; Kaput y Nemirovsky, 1995).

La investigación que realizaron los creadores de *SimCalc* sugiere que este entorno se puede utilizar para una temprana introducción a las matemáticas del cambio, en otras palabras, se puede utilizar para los niños en nivel escolar primario (Stroup, 1996). Es importante señalar que este es un caso de acceso democrático al poderoso concepto de la variación en las matemáticas, pero que este acceso presupone la aclaración de la transición entre nociones matemáticas, por ejemplo, de la noción de razón (claramente situada dentro del dominio aritmético) a la noción de índice (que está relacionada con el dominio del cálculo). En un proyecto de desarrollo educativo en México (2) algunas de las experiencias en la implementación de este *software* y estas ideas han permitido confirmar que la falta de comprensión del maestro de matemáticas o del diseñador de la tarea en este respecto puede obstruir el paso del estudiante hacia las matemáticas de nociones de cambio, dejándolo en el nivel aritmético de pensamiento en lo que respecta al análisis de los fenómenos del movimiento. De esta manera, si se desea implantar propuestas de innovación educativa como la mencionada aquí, es necesario llevar a cabo una investigación sobre los procesos cognitivos que se presentan durante el paso hacia estas nociones y sobre el papel de las intervenciones de los maestros en esta etapa.

En *SimCalc*, como en otros entornos de cómputo, los estudiantes pueden experimentar con modelos intermedios entre los fenómenos físicos y los modelos matemáticos formales. Un ejemplo similar es el de las hojas de cálculo, donde el trabajo con columnas numéricas (en las cuales se pueden describir las variaciones funcionales) introduce un enfoque numérico a la variación que incluye los referentes relacionados con el mundo real a través de los nombres de las columnas. La posibilidad de utilizar, además, otros sistemas de representación como gráficas (que permiten a los estudiantes analizar visualmente las tendencias y variaciones en el comportamiento global) y símbolos (ecuaciones generales expresadas con la sintaxis de la hoja de cálculo que permiten a los estudiantes manipular la variación misma, por ejemplo, a través de cambios en los parámetros de la función) hace posible que el trabajo de los estudiantes se coloque en el nivel de las representaciones intermedias que combina la experiencia directa con los fenómenos y el correspondiente modelo matemático (en este caso, la expresión analítica de la función).

El ejemplo anterior ilustra cómo el uso de ciertos entornos computacionales interactivos puede transformar profundamente la manera en que se entienden y aprenden las matemáticas a nivel secundario (a través del establecimiento de un lazo entre las matemáticas y el mundo físico usando sistemas de representación diferentes) así como los contenidos curriculares característicos de este nivel escolar (las matemáticas del cambio y modelación).

La sección 8.2.4. se refiere a cómo el uso de herramientas de geometría dinámica (como *Cabri-Geométre*) también puede transformar las prácticas matemáticas, con cambios del trabajo estático en tareas exploratorias y experimentales.

[...]

En cuanto a la forma y el contenido, el álgebra de nivel secundario también puede sufrir grandes transformaciones dependiendo de las herramientas electrónicas (computadoras o calculadoras gráficas) que se utilicen para elaborar: un enfoque funcional; un enfoque a través de ecuaciones y resolución de problemas; o a través de la generalización; o a través de la modelación (Bednarz *et al.*, 1996).

Hay temas matemáticos que incluso hoy en día siguen sin tener la debida representación en el plan de estudios de nivel secundario. Tal es el caso de la recursividad, la presentación y manejo de la información (probabilidad y estadística) y la modelación. La llegada de las TIC hace posible abrir espacios para esos temas en las matemáticas a este nivel escolar, ya que los entornos como LOGO y las hojas de cálculo permiten, por ejemplo, desarrollar la noción de función recursiva. El manejo de la información también se puede acelerar y transformar con el uso de bases de datos y diversos sistemas de representación. Las simulaciones electrónicas de fenómenos casuales pueden transformar el trabajo de clase en tareas de experimentación, registro, predicción y análisis que sirven como fundamento para la construcción de nociones de probabilidad.

La modelación exploratoria y expresiva (3) contribuye a exponer a los estudiantes de secundaria a trabajos con situaciones abiertas y al planteamiento de problemas. La modelación, concebida como trabajo con "mundos artificiales" (4) según Mellar *et al.* (1994) hace posible enseñar las matemáticas en el contexto de la ciencia, ya que en estos mundos los fenómenos físicos, biológicos, ambientales y geográficos pueden recrearse. Los resultados del estudio anglomexicano "School based mathematical practices" (1) sugieren que la modelación desde la perspectiva de las ciencias es una fuente rica de significados para los modelos matemáticos formales y que los diferentes sistemas de representación y formas utilizadas para ese propósito se ajustan a los recursos estructurales de conocimiento matemático (de acuerdo con la teoría de Lave, 1988). *Stella* es otra herramienta de modelación, generalmente utilizada en las escuelas con recursos de cómputo, que ha demostrado ser una importante contribución al desarrollo de las habilidades de los estudiantes que van más allá de los objetivos escolares. (Stevenson,). Por otra parte, las nuevas tendencias de reforma educativa contemplan la enseñanza de las matemáticas dentro de un contexto y, particularmente, su relación explícita con otras áreas del conocimiento. Esto abre una nueva y genuina posibilidad de incorporar la modelación como un elemento curricular en las matemáticas escolares en el futuro cercano.

Casi todos los estudios que actualmente están utilizando TIC hacen mención del rol que estas herramientas desempeñan en el aprendizaje cooperativo y colaborativo. Es innegable que, cuando una parte importante de la retroalimentación proviene de la herramienta de trabajo y de la interacción entre compañeros (tanto maestros como estudiantes), se ve afectada la organización de la clase de matemáticas. Por lo general, la existencia de estas herramientas junto con un modelo de aprendizaje colaborativo ayuda a superar la pasividad del estudiante y permite que el flujo de información siga siendo unidireccional (del maestro al grupo de estudiantes).

[...]

Aparte de los entornos de aprendizaje basados en las computadoras que se mencionaron en esta sección, también se puede comentar que la introducción de la tecnología de información al salón de clases de matemáticas ha traído consigo la posibilidad de democratizar el conocimiento matemático (por ejemplo, matemáticas del movimiento), que antes sólo era accesible a una minoría de estudiantes que cursaban una carrera universitaria científica. Por otra parte, el entorno tecnológico (que incluye calculadoras gráficas y en general sistemas de álgebra computacional) también permite al ciudadano promedio tener acceso a fragmentos de conocimiento matemático que se han desarrollado recientemente, como es el caso de las matemáticas discretas, la teoría de gráficas, la probabilidad, la estadística y sus aplicaciones en las ciencias sociales y naturales. Con esta última, parecería posible cerrar la brecha entre las matemáticas escolares y las aplicaciones más recientes de las matemáticas y definir de manera más amplia el perfil del ciudadano con educación matemática. No obstante, en el área de la investigación educativa, ciertas preguntas siguen sin tener respuesta. A continuación se citan algunos ejemplos:

- Investigar el alcance del conocimiento adquirido en el entorno tecnológico respecto a la vida diaria de los individuos y respecto a su manera de entender el mundo físico y social que los rodea. ¿Se da una interiorización de este conocimiento cuando se trabaja en un entorno tecnológico y en una transferencia de dicho conocimiento a las vidas de los individuos que vaya más allá del entorno en sí y de los alrededores?
- Investigar la influencia del componente cultural en los procesos de asimilación de ambientes tecnológicos en las escuelas secundarias. ¿Se da esta asimilación de una manera independiente a la valoración del conocimiento científico en beneficio del entorno social? ¿O se valora la presencia de tecnología en las escuelas desde el punto de vista tecnócrata?
- Investigar la naturaleza del conocimiento generado a partir del trabajo en un ambiente tecnológico y en un modelo pedagógico relacionado (interactivo/colaborativo, interactivo/cooperativo).
- Registrar y profundizar las nuevas habilidades y capacidades matemáticas desarrolladas a partir del aprendizaje en el entorno tecnológico.
- Investigar los detalles de la transición de los modelos pedagógicos y el contenido de la enseñanza clásica a los nuevos contenidos, accesibles a través del ambiente tecnológico y los modelos de interacción así como la construcción social del conocimiento. ¿Es posible aislar los factores claves en esta transición? ¿O dichos

procesos sólo se encontrarán después de estudios sistemáticos?

- Definir el camino de la institucionalización del conocimiento en el salón de clases, cuando se trabaja en los entornos tecnológicos en los cuales las nociones matemáticas se manejan con versiones simplificadas de los conceptos formales.

8.4. Ingreso a las matemáticas de nivel secundario en el nuevo milenio

Las características de la sociedad moderna relacionadas con las TIC definitivamente están teniendo implicaciones importantes en el contenido y panorama de las matemáticas escolares. En particular, el uso intensivo de TIC en el lugar de trabajo requiere cada vez más que se desarrollen nuevas habilidades matemáticas en la escuela secundaria. Sin embargo, determinar cuál debe ser la formación matemática de un estudiante que haya terminado la escuela secundaria requeriría de un análisis sistemático y minucioso de los niveles, habilidades y conocimientos matemáticos actualmente necesarios en los sectores comercial, financiero e industrial de países con diferentes niveles de desarrollo. Esto subraya la necesidad de definir las matemáticas escolares de nivel secundario para el nuevo milenio de acuerdo con los estándares de las sociedades desarrolladas y en desarrollo y, también de acuerdo con el rol de la escuela secundaria en dichas sociedades. Los empresarios han definido una serie de actitudes y habilidades que las escuelas deberían promover en los estudiantes de manera que se volvieran más conscientes del poder y la relevancia de las matemáticas para modelar situaciones del mundo real y sobre la importancia de usar las TIC en el trabajo de modelación en la escuela. Las capacidades que la industria requerirá de sus empleados en el futuro son (Clayton, 1999):

- Una noción de los símbolos necesarios para construir modelos matemáticos y para manipularlos con un entendimiento más profundo de qué es lo que se está modelando.
- Experiencia en la resolución de problemas.
- Conciencia sobre cómo las matemáticas y las TIC pueden usarse de manera sinérgica.
- Conciencia sobre la importancia de la validación y verificación de las aplicaciones de modelos.
- Manejo de la incertidumbre.

Se tiene entonces que, según Clayton, la escuela secundaria y la educación universitaria deberían contribuir a la formación de recursos humanos para las sociedades futuras con programas académicos que incluyeran:

- Principios y aplicaciones de la modelación matemática.
- Técnicas matemáticas y métodos de análisis que se enseñen en contextos que permitan a los alumnos entender mejor cómo se pueden usar.

- Uso de métodos numéricos.
- Los efectos de la incertidumbre y cómo medirlos.
- El uso de las TIC para la exploración, transformación de datos y recreación de conceptos matemáticos con la ayuda de la visualización.
- Resolución de problemas en diferentes áreas del conocimiento.
- Principios de verificación, validación y estimación (Clayton, 1999).

Los estudios sobre las habilidades matemáticas similares a las anteriores pero más relacionadas con las actividades comerciales, financieras y científicas podrían proporcionar una mejor noción de cuáles son las modificaciones necesarias que deben hacerse a los contenidos y los métodos de enseñanza. Sin embargo, determinar el rol que desempeña la escuela secundaria en diferentes sociedades (desarrolladas y en desarrollo), tendrá un papel decisivo en el establecimiento de políticas educativas que puedan apuntar o enfatizar dichos contenidos en este nivel escolar. En la mayoría de los países, la escuela secundaria representa el final de la educación básica así como la preparación del estudiante para estudios preuniversitarios y universitarios. En contraste, en otros países, la escuela secundaria se ha incorporado recientemente a la educación básica obligatoria y prácticamente representa la última etapa educativa para un importante sector de la población.

[...]

La relación directa entre el uso de tecnologías de información (TI) en las escuelas y la posibilidad de convertir a un estudiante en un ciudadano con educación científica, útil en su lugar de trabajo, hace que este asunto sobre la orientación que debe darse al estudiante cuando aprende a utilizar dichas herramientas sea el centro de un debate entre dos puntos de vista extremos: la visión tecnócrata, que vincula la TI con la eficiencia, velocidad y el servicio a los intereses de la industria y el mundo de los negocios, y la visión sociocultural que enfatiza el punto sobre la igualdad y el acceso. Cuando Clayton sugiere que las matemáticas escolares se orienten hacia el desarrollo de habilidades y conocimientos que puedan ser útiles en las esferas comercial e industrial en el futuro, parecería que está adoptando una visión tecnócrata. Sin embargo, al hacer que los conceptos matemáticos se recreen a través de la visualización y la exploración. de la transformación e interpretación de los datos como parte de un programa educativo futuro, la posición de Clayton parece acercarse más al otro extremo, al de la visión sociocultural, dado que estas habilidades y experiencias promueven la capacitación de individuos bien informados con acceso al mundo de las estadísticas (que provienen del mundo de las finanzas y la política) y con una rica experiencia matemática. De esta manera, los nuevos enfoques sobre el contenido y orientación curricular tienen un amplio horizonte de investigación respecto a los sistemas de valores que, en términos del rol del conocimiento científico, prevalecen la sociedad y determinan en una buena proporción las prioridades educativas de la enseñanza.

8.5. Algunas preguntas sin resolver relacionadas con el acceso democrático al conocimiento matemático

En este capítulo, las perspectivas sobre las oportunidades de acceso de los estudiantes a ideas matemáticas centrales en la educación secundaria nos proporcionan una visión sobre cuáles son las necesidades que deben cubrirse en el futuro cercano en lo que respecta al desarrollo educativo. En particular, al analizar el rol de la escuela secundaria en las sociedades del nuevo milenio, resulta claro que se deberán incluir nuevos contenidos y habilidades matemáticas en los planes de estudio y programas de este nivel educativo. También resulta claro que la incorporación de las TIC a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas facilitará esta tarea. Sin embargo, hay muchas preguntas no contestadas en el ámbito de investigación sobre la educación de las matemáticas que pueden proporcionar a quienes participan en los cambios y reformas educativas los fundamentos académicos que apoyen la implementación de innovaciones educativas. Algunas de estas preguntas están relacionadas con los nuevos contenidos y habilidades que hasta hoy han permanecido sin una adecuada representación en la escuela secundaria. Al respecto, por ejemplo, sería necesario responder a las siguientes preguntas:

- ¿Cuáles son las dificultades de aprendizaje intrínsecas de los nuevos temas escolares de matemáticas que pudieran obstaculizar el acceso democrático a ellos por parte de los estudiantes entre 11 y 16 años?
- ¿Cómo pueden manejar estos obstáculos los enfoques innovadores de enseñanza y aprendizaje (por ejemplo, el uso de computadoras y enfoques de aprendizaje colaborativos)?
- ¿Cuáles son los procesos de transición involucrados en las habilidades de construcción de nociones y de desarrollo de habilidades en los estudiantes adolescentes, como: manejo de datos, análisis de modelos matemáticos, validación, conjeturación y predicción de modelos, uso de procesos recursivos?

Con relación al uso de las TIC en la enseñanza de las matemáticas, surgen estas preguntas:

- ¿Cuál es el impacto cognitivo de utilizar entornos de cómputo y calculadoras gráficas para ayudar a los estudiantes a desarrollar la exploración, conjeturación y estimación del pensamiento matemático?
- ¿Qué tan viable es dar el paso hacia la formalización o institucionalización del conocimiento producido al utilizar enfoques con base en las computadoras?
- ¿Puede progresar la investigación al mismo paso que el trabajo de las TIC? ¿Cómo influirá el acceso a material de enseñanza en Internet a las matemáticas escolares?
- ¿Qué nuevos modelos de salón de clases y estilos de organización escolar surgirán con el aumento en el uso de TIC?

En relación con el trabajo de investigación en enseñanza de las matemáticas que se ha realizado a lo largo de las dos últimas décadas. es razonable esperar que se llegue a responder preguntas similares a los siguientes:

- ¿Cómo se manifiestan los procesos de abstracción y generalización en el escenario de los nuevos contenidos, habilidades y herramientas matemáticas?
- ¿Cómo asimilarán los investigadores los nuevos paradigmas en este milenio, específicamente al estar tratando, por un lado, con los procesos de aprendizaje de los adolescentes y, por el otro, considerando los requisitos e influencias provenientes de contextos ajenos a la escuela?

Independientemente de la importancia que las preguntas relacionadas con las matemáticas del nivel secundario puedan tener en las agendas de investigación del siglo XXI, por lo general es importante también reconocer que el paso hacia perspectivas de investigación sobre el acceso democrático a ideas matemáticas poderosas debe contemplar tanto la investigación aplicada como el arduo trabajo de la investigación básica. De hecho, ante el surgimiento de nuevos y diversos paradigmas de investigación en el campo de la educación matemática, que está marcando el cambio de siglo y de milenio, es importante conservar la naturaleza inquisitiva del conocimiento matemático como uno de los conceptos centrales que puede generarse a través de los nuevos contenidos curriculares que se impartirán, las nuevas habilidades que se desarrollarán y las nuevas herramientas de aprendizaje que se utilizarán.

Notas

1. El trabajo de colaboración anglomexicano (con fondos de la Spencer Foundation, número de apoyo B-1493) es conducido por dos equipos de investigación, uno en Inglaterra y uno en México. La investigación se basó en los campos de la psicología cultural y la teoría de la actividad así como en las áreas de la educación de la ciencia y de las matemáticas. La investigación se centró en las prácticas matemáticas de estudiantes de ciencias de entre 16 y 18 años de edad y las influencias culturales de estas prácticas matemáticas escolares en México e Inglaterra.
2. Del trabajo del *London Mental Models Group* (Universidad de Londres. 1986). Se hace una distinción entre los Modelos Exploratorios y los Modelos Expresivos. Los primeros son modelos que ya se han construido y que se proporcionan a los estudiantes para que ellos exploren algunos aspectos de los fenómenos que se están modelando. Los segundos (modelos expresivos) fueron construidos por los estudiantes para expresar sus puntos de vista sobre el fenómeno que se estaba modelando.
3. Mellar *et al.* (del *London Mental Models Group*) consideran la modelación como un medio y como una herramienta con la cual los estudiantes pueden crear su propio mundo y utilizarlo para expresar sus propias representaciones y para explorar las ideas de otros. Cuando los estudiantes crean un modelo para representar. para expresar una situación o un fenómeno de comportamiento, el modelo en cuestión se llama *expresivo.* Cuando

los estudiantes ya tienen un modelo construido para hacer sus exploraciones sobre aspectos o características de los fenómenos que ya han sido modelados, el modelo en cuestión es denominado *exploratorio*. Se refieren a esta idea de la modelación como *aprendizaje con mundos artificiales*. En esta perspectiva, el enfoque es la naturaleza de las ideas sobre el mundo que construye la mente humana.